Meridyen Yay Uzunluğu Hesabı

Doç.Dr. İ. Öztuğ BİLDİRİCİ

Yeryüzünün elipsoit kabul edilmesi halinde meridyenler elips biçimindedir. Hepimiz dairenin çevresini biliriz ama elipsin çevresi hakkında ezbere bildiğimiz bir formül yoktur. Bunun nedeni elips yay uzunluğunun eliptik bir entegral ile ifade edilmesidir. Eliptik entegraller ancak seriye açılarak çözülebilirler. Meridyen yay uzunluğuna jeodezide ve harita projeksiyonları ile ilgili hesaplamalarda zaman zaman gerek duyulur.

Ekvatordan Verilen Bir Enleme Kadar Meridyen Yay Uzunluğu

Meridyen yay uzunluğu için, M meridyen yönünde eğrilik yarıçapı olmak üzere,

$$G = \int_0^{\varphi} M d\varphi = a\left(1-e^2\right)\int_0^{\varphi} W^{-3} d\varphi = c\int_0^{\varphi} V^{-3} d\varphi \qquad (1)$$

entegralinin alınması gerekir. Bu ise eliptik bir entegral olduğundan, W^{-3} ya da V^{-3} seriye açılarak serinin entegralinin alınması ile mümkün olur.

$$G = \int_0^{\varphi} M d\varphi = a\left(1-e^2\right)\int_0^{\varphi} \frac{1}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}} d\varphi = c\int_0^{\varphi} \frac{1}{\left(1+e'^2\cos^2\varphi\right)^{3/2}} d\varphi$$

Seri açılıp, entegre edildikten sonra aşağıdaki katsayılara göre düzenleme yapılır.

a, e parametre sistemine göre:

$$\begin{aligned}
\alpha &= a\left(1-e^2\right)\left(1+\frac{3}{4}e^2+\frac{45}{64}e^4+\frac{175}{256}e^6+\frac{11025}{16384}e^8\right) \\
\beta &= -\frac{a\left(1-e^2\right)}{2}\left(\frac{3}{4}e^2+\frac{15}{16}e^4+\frac{525}{512}e^6+\frac{2205}{2048}e^8\right) \\
\gamma &= \frac{a\left(1-e^2\right)}{4}\left(\frac{15}{64}e^4+\frac{105}{256}e^6+\frac{2205}{4096}e^8\right) \\
\delta &= -\frac{a\left(1-e^2\right)}{6}\left(\frac{35}{512}e^6+\frac{315}{2048}e'^8\right)
\end{aligned} \qquad (2)$$

Meridyen yay uzunluğu hesaplanan katsayılarla aşağıdaki gibi bulunur:

$$G = \alpha\varphi + \beta\sin 2\varphi + \gamma\sin 4\varphi + \delta\sin 6\varphi \qquad (3)$$

Yukarıdaki ifadede φ radyan biriminde olmalıdır.

Helmert ise n uzaklık oranı ve ekvator yarıçapına (a) bağlı olarak aşağıdaki bağıntıyı önermiştir.

$$n = \frac{a-b}{a+b} = \frac{1-\sqrt{1-e^2}}{1+\sqrt{1-e^2}}$$

$$G=\frac{a}{1+n}\left\{\left(1+\frac{n^2}{4}+\frac{n^4}{64}\right)\varphi-\frac{3}{2}\left(n-\frac{n^3}{8}\right)\sin 2\varphi+\frac{15}{16}\left(n^2-\frac{n^4}{4}\right)\sin 4\varphi-\frac{35}{48}n^3\sin 6\varphi\right\} \quad (4)$$

(4) bağıntısı da (3) gibi düzenlenebilir. Bu durumda katsayıların değerleri aynı olur.

Bazı Elipsoitler İçin Katsayılar

Tablo 1'de verilen bazı elipsoitler için meridyen yay uzunluğu için katsayılar hesaplanabilir. Katsayılar enleme bağlı olmayıp yalnızca elipsoit boyutlarına bağlıdır. Tablo 2'de Hayford ve GRS 80 elipsoitleri için hesaplanan katsayılar görülmektedir.

Tablo 1: Yaygın Kullanılan Bazı Referans Elipsoitlerinin Boyutları

Elipsoit	**a**	**b**	**f**
Uluslararası 1924 (ED50)	6378388	6356911.9461	1/297.0
WGS84	6378137	6356752.314	1/298.257223563
GRS80	6378137	6356752.298	1/298.257
Bessel 1841	6377397.1550	6356078.9632	1/299.1528
Clarke 1880	3678249.145	6356514.990	1/293.466

Tablo 2: Katsayıların değerleri (*m*)

	Uluslararası 1924	GRS80
α	6367654.5000	6367449.1457
β	-16107.0346	-16038.5087
γ	16.9762	16.8326
δ	-0.0223	-0.0220

Sayısal Uygulama

Ekvatordan 37° (Kuzey) enlemine kadar meridyen yay uzunluğunu bulalım. Uluslararası 1924 elipsoiti için,

G=4096577.7917 m

GRS80 elipsoiti için,

G=4096510.9747 m

bulunur.

Yay Uzunluğuna Karşılık Gelen Enlemin Bulunması

Bu hesaplama için iterasyon gereklidir.

$$G = \alpha\varphi + \beta \sin 2\varphi + \gamma \sin 4\varphi + \delta \sin 6\varphi$$

Fonksiyonunda, Newton-Raphson iterasyonu uygulanırsa,

$$f(\varphi) = \alpha\varphi + \beta \sin 2\varphi + \gamma \sin 4\varphi + \delta \sin 6\varphi - G = 0$$
$$f'(\varphi) = \alpha + 2\beta \cos 2\varphi + 4\gamma \cos 4\varphi + 6\delta \cos 6\varphi$$

olmak üzere iterasyon yapılmalıdır.

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i - \frac{f(\varphi_i)}{f'(\varphi_i)}$$

iterasyona başlangıç değeri olarak,

$\varphi_0 = \dfrac{G}{\alpha}$ alınır, iterasyona $\dfrac{f(\varphi_i)}{f'(\varphi_i)}$ değeri yeterince küçük oluncaya kadar devam edilir.

Sayısal Uygulama

Uluslararası elipsoit üzerinde ekvatordan itibaren 4500000.00m yay uzunluğuna karşılık gelen enlemi bulunuz.

Adım	$\varphi°$	$d\varphi°$
0	40.490734510	-0.143206018
1	40.633940527	0.000001788
2	40.633938740	0.000000000