

Harita Mühendisliğinde Diferansiyel Geometri

Ders Notu

Aydın ÜSTÜN

Hacettepe Üniversitesi
Geomatik Müh. Bölümü
Ankara

İbrahim Öztuğ BİLDİRİCİ

Konya Teknik Üniversitesi
Harita Müh. Bölümü
Konya

2021

Dizgi: Üstün ve Bildirici

Konya, 2020

Online Erişim: <http://www.iobildirici.com/docs/hmdg.pdf>

TASLAK

Önsöz

Konya Teknik Üniversitesi Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi Harita Mühendisliği Bölümü öğretim planında okutulmakta olan diferansiyel geometri dersi için ders notu ihtiyacı, bu kitabın ortaya çıkış nedeni olmuştur. Bu dersin daha sonraki yarıyılarda okutulan matematiksel jeodezi konularının altyapısını hazırlaması düşüncesi ile genel bir diferansiyel geometri yerine eğrilerin ve yüzeylerin diferansiyel geometrisine odaklanılmıştır. Bu şekilde küre ve elipsoit yüzeyi üzerinde açı, uzunluk ve alan büyüklüklerinin hesaplanması, temel ödev çözümleri ve harita projeksiyonları gibi konularda altyapı sağlanması hedeflenmiştir. Matematiksel jeodezi ve harita projeksiyonları gibi derslerde kısa bir diferansiyel geometri özeti vermek yerine, ayrı bir ders olarak ele alınmasının daha doğru bir yaklaşım olduğu değerlendirilmektedir.

Ders, Konya'dan ayrılıncaya kadar değerli meslektaşım Prof.Dr. Aydın ÜSTÜN tarafından verilmiş, kitabın ortaya çıkışı da bu dönemde olmuştur. Ders ile birlikte bu değerli çalışma da tarafımdan devir alındıktan sonra daha fazla alıştırmaya ve örneklerle zenginleştirilmiş, bazı eklemeler yapılarak şu an okuyucunun elinde bulunan şeklini almıştır.

Kitabın hacminin az olması ve erişim kolaylığı nedenleriyle basılı bir doküman yerine elektronik ortamda yayımlanması tercih edilmiştir. Kitaba <http://www.iobildirici.com/docs/hmdg.pdf> bağlantısından erişilebilir.

Kitabın öğrencilerimize ve diğer okuyuculara faydalı olmasını dilerim.

Prof.Dr. İbrahim Öztuğ BİLDİRİCİ, Konya, 2020

TASLAK

1 GİRİŞ	1
2 VEKTÖRLER ve VEKTÖR FONKSİYONLAR	5
2.1 Vektörler	6
2.1.1 Vektörlerin toplamı	7
2.1.2 Bir vektörün bir skaler ile çarpımı	8
2.1.3 Doğrusal bağımlılık ve doğrusal bağımsızlık	8
2.1.4 Baz vektörler ve bileşenleri	9
2.1.5 Vektörlerin skaler çarpımı	10
2.1.6 Ortonormal bazlar	12
2.1.7 Vektörel çarpım	13
2.1.8 Skaler üçlü çarpım	14
2.2 Vektör Fonksiyonlar	16
2.2.1 Vektör fonksiyonun türevi	18
2.2.2 Taylor açılımı ve analitik fonksiyon	20

2.3	Alıştırmalar	21
3	GENEL EĞRİ TEORİSİ	27
3.1	EĞrinin Parametrik Gösterimi	27
3.2	EĞrinin Yay Uzunluğu	29
3.3	Teğet Birim Vektör ve Normal Düzlem	35
3.4	EĞrilik	38
3.5	Asal Normal Birim Vektör ve Oskülatör Düzlemi	43
3.6	Hareketli Üçlü Vektör Sistemi	45
3.7	Burulma ve Frenet-Serret Denklemleri	47
3.8	Yerel Koordinat Sistemine Göre EĞrinin Bağıl Konumu	50
3.9	Alıştırmalar	52
4	ÜÇ BOYUTLU ÖKLİT UZAYINDA YÜZEYLER	63
4.1	Fonksiyonlar ve Yüzeyler	64
4.1.1	Yüzey normali ve teğet düzlemin denklemi	65
4.2	Düzenli Parametrik Yüzeyler	68
4.3	Birinci Temel Biçim	72
4.3.1	Yay uzunluğu, yüzey eğrileri arasında açı ve alan hesabı	74
4.4	İkinci Temel Biçim	80
4.5	Bir Yüzeyin EĞrilikleri ve Normal Kesit	84
4.6	Jeodezik EĞrilik ve Jeodezik EĞri	87
4.6.1	Jeodezik eğriliğin denklemi	90
4.6.2	Jeodezik eğrinin denklemi	94
4.7	Alıştırmalar	96
5	BİR YÜZEYİN BİR BAŞKA YÜZEYE İZDÜŞÜMÜ	105

5.1	Uzunluk ve Alan Deformasyonu	107
5.2	Tissot Endikatrisi	109
5.3	Açı Deformasyonu	111
5.4	Alıştırmalar	114
6	TENSÖRLER	117
6.1	Metrik Tensör	118
6.1.1	Birinci temel biçim ve yay uzunluğu	119
6.1.2	Koordinat dönüşümleri	120
6.1.3	Yay uzunluğunun koordinat sisteminden bağımsız olması	121
6.1.4	Uzunluk, açı ve alan	121

TASLAK

Bölüm 1

GİRİŞ

Matematiği oluşturan konular, yaşanan dönemle doğrudan ilişkili olduğundan ilgi ve anlamlandırmada zamana bağlı değişimler görülür. Örneğin antik Yunan çağında geometri, konumsal ilişkilerin incelendiği bir matematik dalı olarak algılanırken; günümüzde diferansiyel topoloji veya diferansiyellenebilir manifoldların incelendiği oldukça karmaşık bir matematik dalına dönüşmüştür. Benzer durum, geometrinin bir alt kolu olan diferansiyel geometri için de geçerlidir.

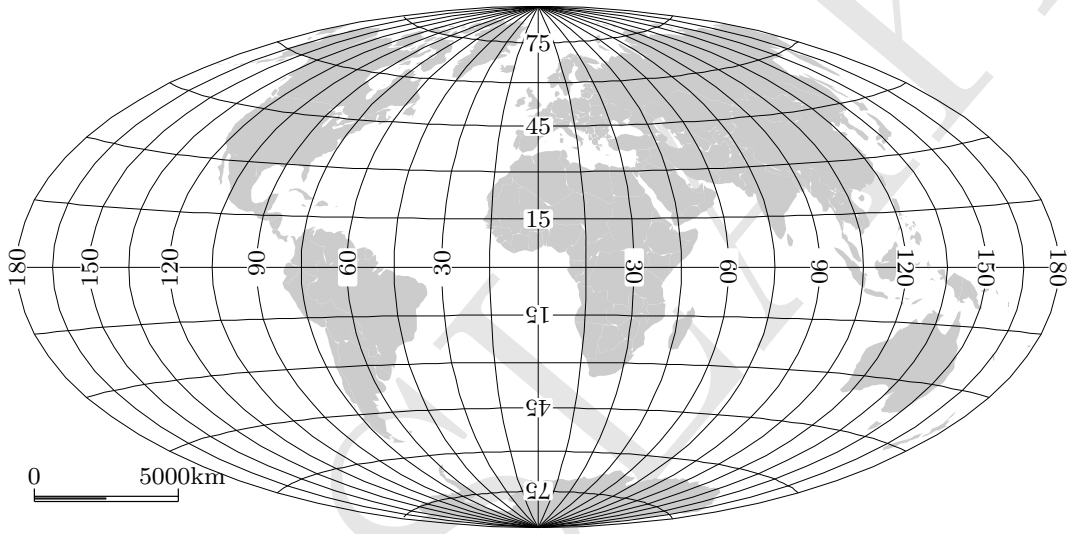
Klasik diferansiyel geometri, eğri ve yüzeylerin yerel özelliklerini ele alır. Burada yerel özellikler denildiğinde, eğri ya da yüzeyin bir nokta civarındaki (komşuluğundaki) davranışı anlaşılır. Modern yaklaşımda, geometri ve diferansiyel geometri arasındaki çizginin giderek kaybolduğundan söz edilebilir. Bu nedenle, diferansiyel geometrinin tanımı, geometrinin modern tanımından çok da uzak değildir:

Eğri, yüzey ve manifoldların geometrisini diferansiyel ve integral hesap yoluyla inceleyen matematik dalı.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi diferansiyel geometri diferansiyel denklemler teorisi üzerine kuruludur.

Manifold kavramından matematikte yerel olarak \mathbb{E}^n Öklit uzayına benzeyen topolojik bir uzay anlaşılır. Bir manifold global olarak bir Öklit uzayına benzemek

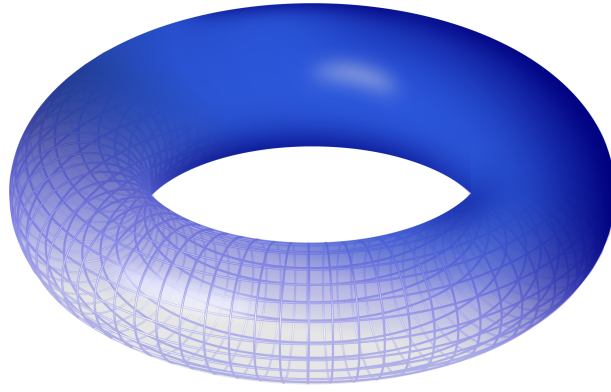
zorunda değildir. Küre, konunun anlaşılması açısından manifoldlara iyi bir örnektir. Yeryüzünün şeklini de küre kabul edebileceğimize göre, yeryüzü üzerinde herhangi bir bölge düzleme (\mathbb{E}^2 uzayına) izdüşürülebilir. Başka bir bölgeye geçildiğinde bir başka düzleme izdüşüm yapılması gerekir. Kesintisiz olarak kürenin tamamının düzleme izdüşümü mümkün değildir. Dünya haritaları yeryüzünün tamamını gösterirler ancak kesintisiz değildir. Başlangıç meridyenine göre yapılmış normal konumlu bir dünya haritasının sınırları $\pm 180^\circ$ meridyenleridir, ki bu meridyenler kürede çakışiktır (Şekil 1.1). Bir başka manifold örneği olarak torus verilebilir (Şekil 1.2). Genel anlamda eğriler ve yüzeyler manifoldların özel halleri olarak kabul edilebilir. Bu bağlamda manifold, eğrileri ve yüzeyleri de kapsayan bir kavram olarak düşünülmelidir. İlk kez G. F. G. Riemann'ın (1826–1866) habilitasyon tezinde¹ kullanılmıştır.



Şekil 1.1: Mollweide projeksiyonunda Dünya

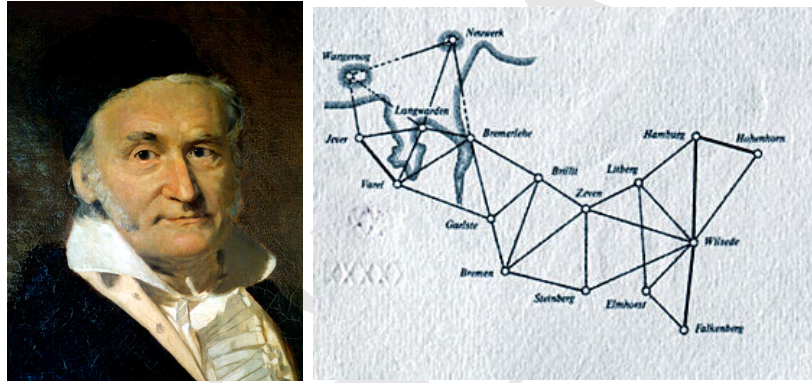
Fiziksel ve geometrik anlamda, teorik jeodezi geometri, diferansiyel ve integral hesap kavramlarını kullanan diferansiyel geometriyi temel alır. Bu temel bilgi, yeryuvarının ağırlık (gravite) alanı içindeki yeryüzü noktasında oluşan çekül eğrisinin ve onu dik kesen nivo yüzeylerinin yerel özelliklerini belirlenmesini olanaklı kılar. Öte yandan, aynı bilgi yeryuvarının haritasının elipsoit, küre, düzlem gibi değişik yüzeylere aktarılmasında da kullanılır. Bu açıdan klasik diferansiyel geometrinin temellerinin atılmasında jeodezik problemlerin önemi büyüktür. Gauss'un 1821–1825 yılları arasında Hannover Krallığının ölçümü için aç

¹Doktora sonrası yapılan ikinci bir tez çalışması. Almanya ve bazı ülkelerde doçent/profesör olabilmek için böyle bir tez yapılması gerekir.



Şekil 1.2: Bir manifold örneği olarak torus

ve uzunluk gözlemleriyle tesis ettiği yüzey nirengi ağı (Şekil 1.3), eğriler ve yüzeyler için diferansiyel geometrinin teoriden pratiğe geçtiği ilk örnek olmuştur.



Şekil 1.3: C. F. Gauss'un (1777–1855) Hannover Krallığının ölçümü için kurduğu nirengi ağı

Jeodezide, küçük ölçekli yüzey kontrol ağlarına ait ölçü ve hesaplamalar, çoğu kez yeryüzünün bir düzlem olduğu varsayılarak gerçekleştirilir ve kontrol noktaları arasındaki konumsal ilişkiler düzlem geometri yardımıyla incelenir. Çalışma alanı genişledikçe, bu varsayım geçerliliğini kaybeder; ölçülen kenarlar yeryüzünün basit anlamda küreye benzerliği nedeniyle büyük daire yayı parçalarına dönüşür. Verilen örneği bir adım daha ileriye götürelim ve yüzey ağının ülke ölçmeleri için kullanılacağını düşünelim. Bu durumda, referans yüzeyi artık dönelellipsoit olmalıdır. Bununla birlikte, ağ noktalarını birleştiren kenarlar büyük daire yaylarından giderek uzaklaşır; başka bir yüzey eğrileri olurlar. Ancak, tüm bu değişimlere karşın, yüzey ağının kenarları yeryüzünün boyutlarına kıyasla diferansiyel kabul edilebilecek kadar küçüktür; sonlu veya kapalı yüzey eğrilerinin

diferansiyel büyüklükleri olarak görülebilir. Öte yandan, gözlem sonuçları olarak elde edilen uzunluk ve açılardan yola çıkılarak, tersine bir işlemle yüzeyin geometrisi hakkında da bilgi elde edilebilir. İşte, eğri ve yüzeylerin diferansiyel geometrisinden yararlanarak yeryüzünün çok sayıda yüzey ağıyla kaplanmasının nedeni, yeryuvarının şeklinin belirlenmesi ve bir başka yüzeye (haritaya) aktarılmasıdır.

Harita mühendisliği uygulamalarında diferansiyel geometri bilgisine, genellikle değişik yüzeyler üzerindeki temel ödev problemlerinin çözümü için gereksinim duyulur. Burada söz konusu yüzeyler, yeryuvarının geometrik referans modelleri olarak kullanılan düzlem, küre ve dönelel elipsoittir. Temel ödev problemlerinin eşitlikleri eğri ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi yardımıyla çıkarılırlar. Genel diferansiyel eşitlikler her türlü (diferansiyellenebilir) yüzey için aynı olsa da, mutlak eşitlikler yüzeyden yüzeye farklılık gösterir. Yüzey eğrilerinin eğrilik özelliklerine göre formülasyon karmaşık görünüm alır. En yalın temel ödev eşitlikleri eğriliğin sıfır kaldığı düzlem ölçmelerinde ortaya çıkar. Bundan başka, yeryuvarının etrafında dolanan yapay uydularının hareketlerini incelemek ve bir uydunun yörüngesindeki konumunu belirlemek için de bu temel bilgilere ihtiyaç vardır.

Diferansiyel geometri, 19. yüzyılın ortalarına kadar matematik anlamında açık bakış açısına göre, başka bir deyişle, Öklit uzayında eğrilerin ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi olarak çalışılmıştır. G. F. G. Riemann'dan (1826–1866) itibaren ise, Öklit geometrisi genelleştirilerek kapalı bakış açısı –*Riemann geometrisi*– geliştirildi (Wikipedia, 2009). A. Einstein (1879–1955) *genel görelilik (izafiyet) kuramını* Riemann geometrisini kullanarak açıklamıştır.

Bu ders notu öncelikle matematiksel jeodezi konularının anlaşılabilmesi için bir altlık oluşturmak üzere hazırlanmıştır. Matematiksel jeodezide öncelikle elipsoit yüzeyi ve yüzey üzerinde eğriler incelenir. Yüzey üzerinde eğri uzunlukları, eğriler arasındaki açılar ve parametre eğrileri ile sınırlanmış bölgelerin alanları hesaplanır. Temel ödev çözümleri yapılır. Bu amaçla eğriler ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi ele alınmıştır. Ayrıca harita projeksiyonlarının temelini oluşturması nedeniyle bir yüzeyin bir başka yüzeye izdüşümü ile eğrilerin ve yüzeylerin incelenmesindeki önemi nedeniyle tensörler konuları da kitabın kapsamında yer almaktadır.

Matematiksel jeodeziye altlık oluşturmak üzere eğriler ve yüzeylerin diferansiyel geometrisi genellikle matematiksel jeodezi kitapları içerisinde ele alınmıştır (Örneğin Grossmann (1976), Aksoy ve Güneş (1983)). Ayrı bir kitap olarak Türkçe kaynaklar içerisinde Öztan vd. (1988) çok tanınan bir eserdir.

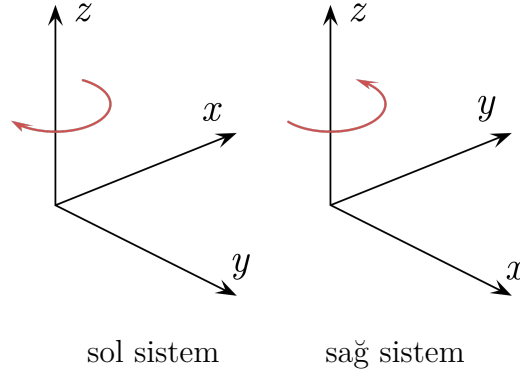
Bölüm 2

VEKTÖRLER ve VEKTÖR FONKSİYONLAR

İki veya üç boyutlu uzaya ilişkin eğri ve yüzeylerin geometrik özellikleri, bu dersin konusunu oluşturmaktadır. Eğri ve yüzeyler, koordinat geometrisi olarak genellikle Kartezyen koordinatlarla ilişkilendirilir. Kısacası bu geometrik nesnelere, kullanılan koordinat sisteminin parametrelerine bağlı birer analitik fonksiyon biçiminde ifade edilirler.

Bir nesnenin geometrik özellikleri (örneğin bir skaler büyüklük) farklı koordinat sistemlerinde farklı denklemlerle gösterilir. Oysa büyüklüğün kendisi, örneğin iki nokta arasındaki uzunluk, hangi koordinat sistemi kullanılırsa kullanılsın aynı kalmalıdır. İşte bu gibi farklı koordinat sistemlerinin diferansiyel hesaba olan etkisi, vektörler kullanılarak basitleştirilebilir. Bu nedenle, esas konulara geçmeden önce temel vektör cebirini ve gösterimini sunmak yararlı olacaktır.

\mathbb{E}^3 uzayında analitik işlemler için birbirine ikişer ikişer dik üç eksen oluşturulan Kartezyen ya da dik koordinat sistemi kullanılır. Uzayda üç eksen sağ ve sol sistem olarak adlandırılan iki şekilde yerleştirilebilir. x eksenini xy düzleminde z eksenini etrafında saat ibresinin tersi yönde döndürüldüğünde y eksenini ile çakışırsa sağ sistem olarak adlandırılır. Saat ibresi yönünde döndürülünce çakışır ise bu kez sol sistem oluşur (Şekil 2.1). Bu kitap kapsamında genel olarak sağ sistem kullanılacaktır.



Şekil 2.1: \mathbb{E}^3 uzayında sağ ve sol Kartezyen koordinat sistemleri

2.1 Vektörler

Vektör (yöneç) bir şiddet ve yön açıklayan doğru parçalarına denir. Fizikte karşımıza çıkan hız, ivme, kuvvet vb. büyüklükler birer vektördür. Üç boyutlu (\mathbb{E}^3) Öklit uzayında bir vektörden söz edildiğinde, a_1, a_2, a_3 reel sayılar olmak üzere $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ şeklinde sıralanmış üçlü sayı kümesi anlaşılır. Uzayda bir nokta, bileşenleri skaler büyüklükler olan sayı kümesinden biri ile gösterilir. Vektörün yönü bu noktayı işaret eder. Başlangıcı koordinat sisteminin merkezinde bulunan vektörlere *mutlak vektörler* denir. Vektörün başlangıcı uzayın herhangi bir noktası ise *bağlı* ya da *görelî vektörlerden* söz edilir. Hareketli cisimlerin yer değiştirmeleri bağlı vektörlerle temsil edilir. Şekil 2.2 mutlak ve bağlı vektörleri göstermektedir. Bir vektörün ötelenmesi, onun şiddetini ve doğrultusunu değiştirmez. Vektörlere ilişkin bazı tanımlar aşağıda verilmektedir:

$$-\mathbf{a} = (-a_1, -a_2, -a_3)$$

Negatif vektör

$$\mathbf{0} = (0, 0, 0)$$

Sıfır vektör

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

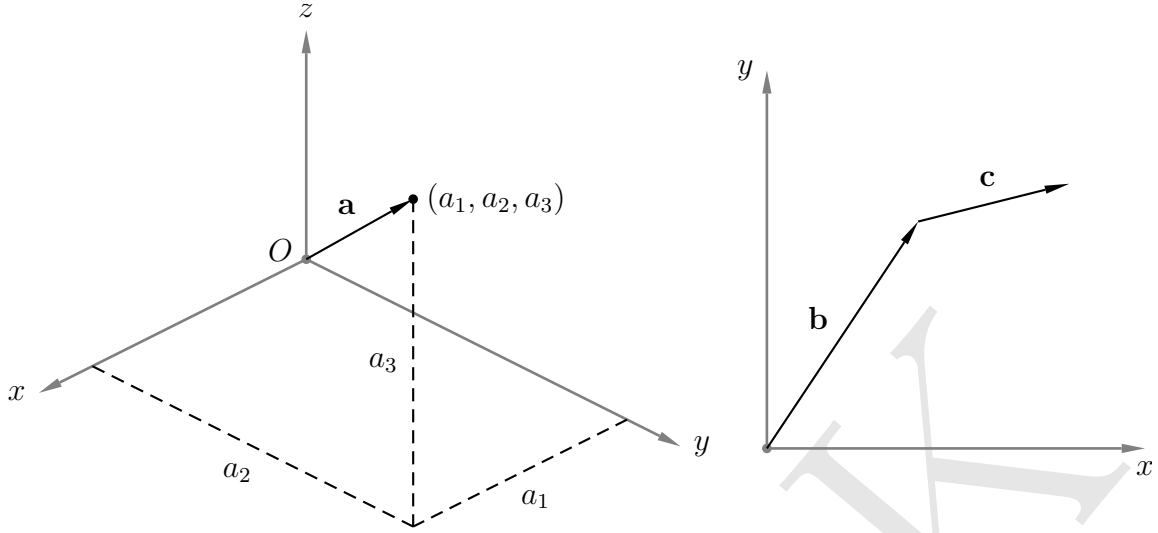
Vektör uzunluğu (şiddeti)

Buna göre; \mathbf{a} için aşağıdaki özellikler geçerlidir:

$$\|\mathbf{a}\| \geq 0,$$

$$\|\mathbf{a}\| = 0 \Rightarrow \mathbf{a} \text{ sıfır vektör } (\mathbf{a} = \mathbf{0}),$$

$$\|\mathbf{a}\| = 1 \Rightarrow \mathbf{a} \text{ birim vektör.}$$



Şekil 2.2: \mathbb{E}^3 uzayında mutlak (**a**) konum vektörü (solda). \mathbb{E}^2 uzayında mutlak (**b**) ve bağıl (**c**) konum vektörü (sağda)

2.1.1 Vektörlerin toplamı

$\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri verilsin. Bu iki vektörün toplamı elemanlarının karşılıklı toplamına eşittir:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) \quad (2.1)$$

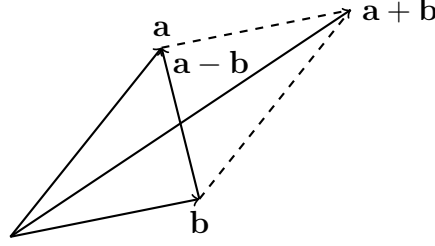
(2.1)'e göre vektör toplamı aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} + \mathbf{b} &= \mathbf{b} + \mathbf{a} && \text{Değişme özelliği} \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} &= \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) && \text{Birleşme özelliği} \\ \mathbf{0} + \mathbf{a} &= \mathbf{a} \\ \mathbf{a} + (-\mathbf{a}) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Vektörlerin farkı ise elemanların karşılıklı farklarına eşittir.

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3) \quad (2.2)$$

\mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörlerinin oluşturduğu paralelkenarda $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ vektörü uzun köşegene, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektörü ise kısa köşegene eşittir (Şekil 2.3).



Şekil 2.3: Vektörlerin toplamı ve farkı

2.1.2 Bir vektörün bir skaler ile çarpımı

k reel bir sayı ve \mathbf{a} bir vektör olmak üzere ikisinin çarpımı,

$$k\mathbf{a} = (ka_1, ka_2, ka_3) \quad (2.3)$$

biçiminde gösterilir. Vektörlerin skaler sayılarla çarpımı,

$$\begin{aligned} k_1(k_2\mathbf{a}) &= k_1k_2\mathbf{a} && \text{Birleşme özelliği} \\ k(\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= k\mathbf{a} + k\mathbf{b} && \text{Yayıma özelliği} \\ 1(\mathbf{a}) &= \mathbf{a} \end{aligned}$$

eşitliklerini sağladığından pozitif bir sayıyla çarpım, vektörün yönünü değiştirmez; sadece şiddetini (uzunluğunu) skaler sayının büyüklüğü oranında değiştirir. Negatif bir sayıyla çarpım, vektör yönünü tersine çevirir. Bir vektör uzunluğunun tersi ile çarpılırsa kendi doğrultusunda birim vektör elde edilir:

$$\mathbf{e} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} \quad (2.4)$$

2.1.3 Doğrusal bağımlılık ve doğrusal bağımsızlık

k_1, k_2, \dots, k_n skaler büyüklüklerden en az biri sıfırdan farklı olmak koşuluyla;

$$k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \dots + k_n\mathbf{u}_n = \mathbf{0} \quad (2.5)$$

eşitliğini sağlayan $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ vektör ailesi *doğrusal (lineer) bağımlıdır* denir. Aksi durumda ya da bir başka deyişle, (2.5) eşitliği sadece $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ olması durumunda sağlanıyorsa söz konusu vektörler *doğrusal bağımsızdır*. Bir doğru boyunca alınan iki vektör \mathbf{a} ve \mathbf{b} olsun. Bu vektörlerin başlangıç noktaları aynı ise, \mathbf{a} ve \mathbf{b} doğrusal bağımlıdır (*eşdoğrusal*). Bir düzlem boyunca alınan \mathbf{a}, \mathbf{b}

ve \mathbf{c} vektörleri aynı başlangıç noktasından çıkıyorsa, söz konusu vektörler doğrusal bağımlıdır (*eşdüzlemsel*). Üç boyutlu uzayda aynı noktadan çıkan doğrusal bağımsız üç vektör her zaman bulunabilir. Ancak aynı uzayda 4. vektör bu vektör kümesini doğrusal bağımlı duruma getirir.

(2.5)'e göre; herhangi bir vektör, doğrusal bağımsız vektörlerin doğrusal kombinasyonu (fonksiyonu) biçiminde gösterilebilir:

$$\mathbf{u} = k_1\mathbf{u}_1 + k_2\mathbf{u}_2 + \dots + k_n\mathbf{u}_n \quad (2.6)$$

2.1.4 Baz vektörler ve bileşenleri

Üç boyutlu uzayda $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ doğrusal bağımsız vektörleri oluşturur. Bu vektörlere *baz vektörler* denir. Uzayda herhangi bir vektör, baz vektörlerin doğrusal fonksiyonu olarak ifade edilebilir:

$$\mathbf{a} = (k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3) \quad (2.7)$$

Burada k_1 , k_2 , k_3 skalerleri baz vektörlerine ilişkin bileşenlerdir.

Teorem 2.1 \mathbb{E}^3 'de doğrusal bağımsız herhangi üç vektör bir baz sistemi oluşturur.

\mathbb{E}^3 'de herhangi üç vektörün,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{b} &= b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{c} &= c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

doğrusal bağımlı olup olmadığını anlamak için baz vektör bileşenlerinin determinantına bakmak yeterlidir:

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

$\Delta = 0$ ise \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} vektörleri doğrusal bağımlıdır.

Örnek 2.1

$\mathbf{a} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{b} = (1, -1, 2)$, $\mathbf{c} = (5, 8, 1)$ vektörlerinin \mathbb{E}^3 'de bir baz sistemi oluşturup oluşturmadığını belirleyiniz.

Vektör bileşenlerinin determinantı,

$$\Delta = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 8 & 1 \end{pmatrix} = -25 \quad , \quad \Delta \neq 0$$

olduğundan $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektörleri doğrusal bağımsızdır; \mathbb{E}^3 'de bir baz sistemi oluştururlar.

Örnek 2.2

$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ \mathbb{E}^3 'de bir baz sistemi oluştursun. Bu baz sisteme göre tanımlı $\mathbf{a} = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$, $\mathbf{b} = \mathbf{u}_2 - 2\mathbf{u}_3$ ve $\mathbf{c} = 3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_3$ vektörleri doğrusal bağımsız mıdır? Belirleyiniz.

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektörleri için yazılacak,

$$k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b} + k_3\mathbf{c} = (2k_1 + 3k_3)\mathbf{u}_1 + (-k_1 + k_2)\mathbf{u}_2 + (-2k_2 + k_3)\mathbf{u}_3 = \mathbf{0}$$

eşitliğinin sadece $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ olmasıyla sağlanması, bu vektörleri doğrusal bağımsız yapar. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ bağımsız olduğuna göre;

$$\begin{aligned} 2k_1 + 3k_3 &= 0 \\ -k_1 + k_2 &= 0 \\ -2k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklemleri bir homojen denklem sistemi oluşturur.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{Ax} = \mathbf{0}$$

Bu denklem sisteminin çözümünden $\det(\mathbf{A}) = 8 \neq 0$ olduğundan $k_1 = k_2 = k_3 = 0$ sonucu çıkar. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ vektörleri doğrusal bağımsızdır.

2.1.5 Vektörlerin skaler çarpımı

İki vektör $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 'nin skaler (iç) çarpımı reel bir sayı verir:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \quad (2.9)$$

İki vektör arasındaki açı θ olmak üzere skaler çarpımın bir başka gösterim biçimi,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\| \cos \theta \quad (2.10)$$

eşitliği ile gösterilir. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ ise $\theta = 0^\circ$ olacağından,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \|\mathbf{a}\|^2 \quad (2.11)$$

sonucu çıkar. Skaler çarpım,

$$\begin{array}{ll} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} & \text{simetri özelliği} \\ (k\mathbf{a})\mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) & k = \text{skaler} \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} & \text{yayımla özelliği} \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0 & \text{iç çarpım pozitif tanımlı} \end{array}$$

özelliklerini yansıtır. Bu özelliklerden hareketle \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörleri Cauchy-Schwarz eşitsizliğini,

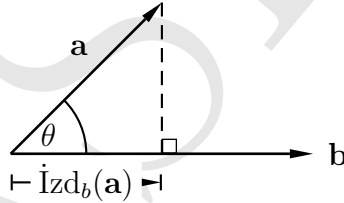
$$|\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \quad (2.12)$$

sağlar. Eşitlik durumu, sadece vektörlerin doğrusal bağımlı olmasıyla geçerlik kazanır.

Sıfır vektörü olmayan iki vektör arasındaki açı $\theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, skaler çarpım ile bulunabilir. Burada, $\theta \in [0, \pi]$ (2.10)'a göre \mathbf{a} 'nın sıfırdan farklı bir başka vektör doğrultusuna (skaler) izdüşümünü,

$$\text{İzd}_b(\mathbf{a}) = \|\mathbf{a}\| \cos \theta \frac{\mathbf{b}}{\|\mathbf{b}\|} \quad (2.13)$$

sağlar (Şekil 2.4). İki vektör birbirine dik ise ($\theta = \pi/2$) izdüşüm sifıra eşittir (ortogonal vektör).



Şekil 2.4: İç çarpım geometrisi (\mathbf{a} vektörünün \mathbf{b} vektörüne izdüşümü)

α_1 , α_2 ve α_3 , \mathbf{a} vektörünün \mathbb{E}^3 uzayında koordinat sisteminin eksen doğrultularıyla ($\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ ve $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$) yaptığı uzay açıları olsun. \mathbf{a} 'nın \mathbf{e}_i birim vektörler ile skaler çarpımı için,

$$\begin{array}{l} \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_1 = \|\mathbf{a}\| \cos \alpha_1 \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_2 = \|\mathbf{a}\| \cos \alpha_2 \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}_3 = \|\mathbf{a}\| \cos \alpha_3 \end{array} \quad (2.14)$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|}$ olmak üzere,

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_i = \cos \alpha_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.15)$$

\mathbf{a} vektörünün doğrultu kosinüslerini verir.

Örnek 2.3

$\mathbf{a} = (3, 4, 5)$ ve $\mathbf{b} = (2, 1, 1)$ vektörleri arasındaki açıyı hesaplayınız.

İki vektörün skaler çarpımı ve uzunlukları,

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 15 \quad , \quad \|\mathbf{a}\| = 5\sqrt{2} \quad , \quad \|\mathbf{b}\| = \sqrt{6}$$

olduğuna göre (2.10)'dan

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} = \frac{15}{5\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 30^\circ$$

çıkar.

Örnek 2.4

$\mathbf{a} = (3, 4, 5)$ vektörünün doğrultu kosinüslerini bulunuz.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}\| &= 5\sqrt{2} \\ \mathbf{n} &= \frac{\mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|} = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{4}{5\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ \cos \alpha_1 &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{3}{5\sqrt{2}} \\ \cos \alpha_2 &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_2 = \frac{4}{5\sqrt{2}} \\ \cos \alpha_3 &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

2.1.6 Ortonormal bazlar

$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ karşılıklı olarak ortogonal baz vektörlerdir; çünkü,

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1 \quad (2.16)$$

ya da kısaca,

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \quad (2.17)$$

eşitliğini sağlarlar. Söz konusu birim vektörler ortonormal baz olarak adlandırılan baz sistemi oluştururlar.

2.1.7 Vektörel çarpım

$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3$ olmak üzere vektörel çarpım,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3 \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{pmatrix} \mathbf{e}_2 + \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix} \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.18)$$

eşitliği ile tanımlanır. Sonuç sıfır vektöründen farklıysa ($\mathbf{a} \times \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$), \mathbf{a} ve \mathbf{b} doğrusal bağımsız, aksi durumda doğrusal bağımlıdır.

Doğrusal bağımsız vektörlerin vektörel çarpımına ilişkin bazı özellikler aşağıdaki gibidir:

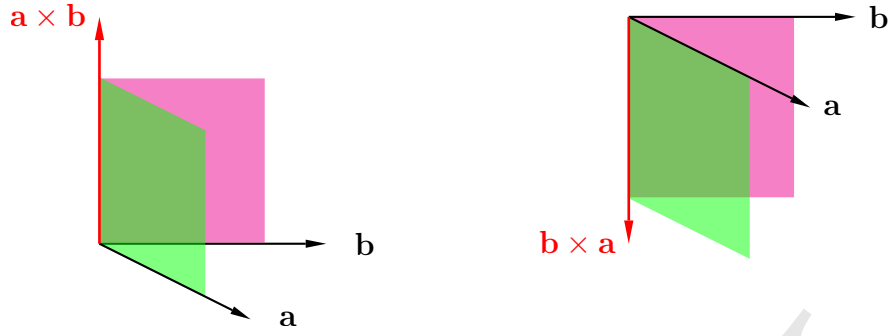
$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &\perp \mathbf{a}, \mathbf{b} && (\text{Şekil 2.5}) \\ \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= -\mathbf{b} \times \mathbf{a} && (\text{ters yansıma özelliği}) \\ \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} && (\text{yayımla özelliği}) \\ (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} &= k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) && (k : \text{skaler}) \\ \mathbf{a} \times \mathbf{a} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Teorem 2.2 Vektörel çarpım sonucu ortaya çıkan yeni vektörün şiddeti $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$, \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörlerinin oluşturduğu paralelkenarın alanını verir:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \sin \theta \quad , \quad \theta = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \quad (2.19)$$

Buna göre iki vektör arasındaki açı vektörel çarpımdan yararlanılarak da bulunabilir.

$$\sin \theta = \frac{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} \quad (2.20)$$



Şekil 2.5: Vektörel çarpımın geometrik gösterimi

Örnek 2.5

$\mathbf{a} = (3, 5, 2)$ ve $\mathbf{b} = (4, 4, 2)$ vektörlerinin vektörel çarpımı,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (5 \cdot 2 - 2 \cdot 4)\mathbf{e}_1 + (2 \cdot 4 - 3 \cdot 2)\mathbf{e}_2 + (3 \cdot 4 - 5 \cdot 4)\mathbf{e}_3 = 2\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2 - 8\mathbf{e}_3$$

ve oluşturdukları paralelkenarın alanı,

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-8)^2} = 6\sqrt{2}$$

olur. İki vektör arasındaki açı,

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{38} \quad \|\mathbf{b}\| = 6$$

$$\sin \theta = \frac{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|}{\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{19}}$$

$$\theta = 13.2626^\circ$$

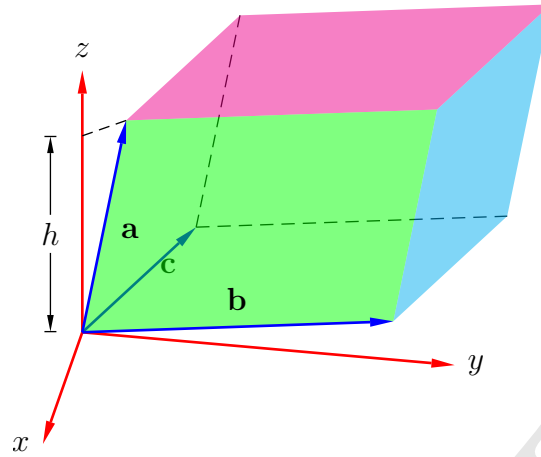
2.1.8 Skaler üçlü çarpım

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ karışık ya da üçlü skaler çarpım olarak adlandırılır. Parantez kullanılmadığında çarpım genellikle $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ şeklinde anlaşılır.

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{c} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$$

olmak üzere, üçlü skaler çarpımı satır vektörlerinin determinantına eşittir:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} &= (a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$



Şekil 2.6: \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} vektörlerinin oluşturduğu paralel yüzlü

Bir başka gösterim,

$$[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

ile verilir. Vektörlerden ikisi yer değiştirirse çarpım işaret değiştirir:

$$\mathbf{c} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$$

\mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} vektörleri doğrusal bağımlı ise

$$[\mathbf{a} \ \mathbf{b} \ \mathbf{c}] = 0$$

çıkar. Vektörler aynı düzlem üzerindedir.

Teorem 2.3 \mathbf{a} , \mathbf{b} ve \mathbf{c} bir paralel yüzlü oluştururlar; bunların skaler üçlü çarpımı paralel yüzünün hacmini verir. Şekil 2.6'e göre paralel yüzünün taban alanı $\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|$, yüksekliği $h = \|\mathbf{a}\| \cos \theta$ olduğundan cismin hacmi,

$$V = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| \cdot \|\mathbf{a}\| \cos \theta \quad (2.22)$$

eşitliğinden bulunabilir.

Örnek 2.6

$\mathbf{a} = (1, 5, 2)$, $\mathbf{b} = (1, 5, 5)$ ve $\mathbf{c} = (5, 1, 2)$ vektörlerinin oluşturduğu paralel yüzünün hacmini bulalım.

$$V = [\mathbf{abc}] = \det \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 72$$

$[\mathbf{abc}] \neq 0$ olması vektörlerin doğrusal bağımsız, dolayısı ile aynı düzlemde olmadıklarını göstermektedir.

2.2 Vektör Fonksiyonlar

Her elemanı bir skaler fonksiyon ile tanımlı vektöre, *vektör fonksiyon* denir. \mathbb{E}^3 'de bir vektör fonksiyon,

$$\mathbf{f}(t) = [x(t), y(t), z(t)] = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z\mathbf{e}_3 \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.23)$$

biçiminde gösterilir. Burada vektör bileşenleri,

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t) \quad (2.24)$$

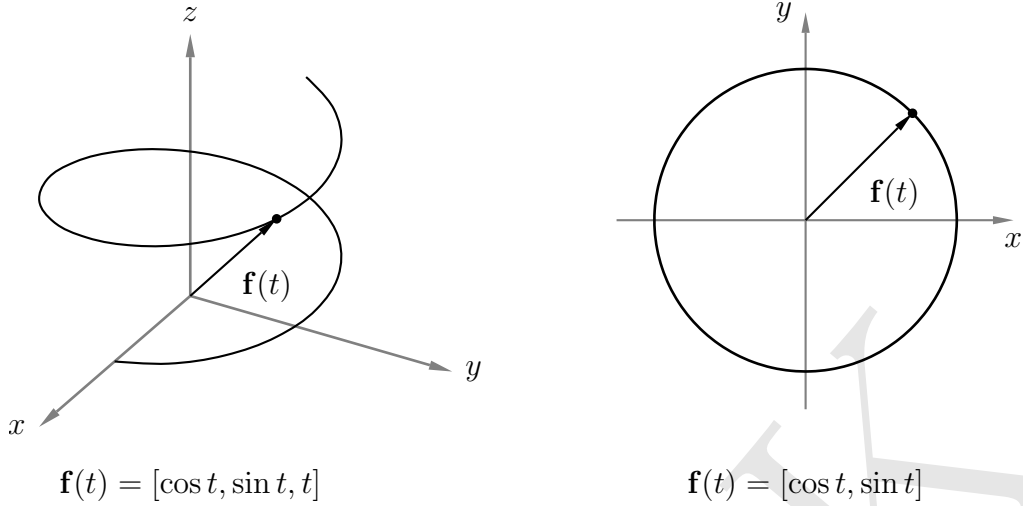
bağımsız değişken t 'nin fonksiyonudur. (2.24), vektör fonksiyonun parametrik denklemleridir. \mathbf{f} vektör fonksiyonu t zaman veya belli bir eğri boyunca alınan s yay uzunluğu ya da başka bir parametreye bağlı olabilir. Diferansiyel geometride vektör fonksiyonlar genellikle bir ya da iki değişkenlidir. Örneğin,

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : t \in I \rightarrow \mathbb{E}^2 & \quad \text{iki boyutlu uzayda } \mathbf{f}(t) \\ \mathbf{g} : u \in A, v \in B \rightarrow \mathbb{E}^3 & \quad \text{üç boyutlu uzayda } \mathbf{g}(u, v) \end{aligned} \quad (2.25)$$

vektör fonksiyonları ayrı ayrı iki topolojik uzay arasındaki izdüşümü (mapping) gerçekleştirir. $\mathbf{f}(t)$ $I \subset \mathbb{E}$ aralığında tanımlı her t değerine \mathbb{E}^2 uzayında karşılık bulurken, $\mathbf{g}(u, v)$ sırasıyla $A, B \subset \mathbb{E}$ aralıklarında tanımlı u, v değerlerini \mathbb{E}^3 uzayındaki bir noktaya dönüştürmektedir. Buna göre her iki vektör tanımlı oldukları aralıklarda sürekli olduğu sürece uzayda düzenli noktalar kümesi oluşturur. Tek parametrelili bir vektörün uzaydaki izi eğri, iki parametrelili vektörün izi ise bir yüzeydir. \mathbb{E}^3 ve \mathbb{E}^2 uzayında tek parametrelili vektör fonksiyonlara ait iki örnek Şekil 2.7'de gösterilmektedir.

(2.25)'de olduğu gibi, bir vektör fonksiyonun uzayda kesintisiz bir eğri ya da yüzey belirtebilmesi için tanım aralığı boyunca sürekli olması gerekir. Vektör değerli fonksiyonların sürekliliği skaler değerli fonksiyonlar gibidir. $\mathbf{f}(t)$ vektör fonksiyonu t_0 noktası civarında tanımlı olsun ve keyfi olarak seçilen t için $\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)$ vektörel farkın uzunluğu (normu) ϵ ile gösterilsin. $\epsilon > 0$ eşitsizliğini sağlayan her ϵ değerine karşılık bir $\delta > 0$ değeri bulunabiliyorsa $\mathbf{f}(t)$ 'nin bir t_0 'da limiti var demektir ve

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{f}(t_0 + \delta) = \mathbf{f}(t_0) \quad (2.26)$$



Şekil 2.7: \mathbb{E}^3 ve \mathbb{E}^2 uzayında $\mathbf{f}(t)$ vektör fonksiyonunun izi

biçiminde gösterilir. (2.26) tersten okunursa $\delta = |t - t_0| > 0$ eşitsizliğini sağlayan her t değeri için $\epsilon = \|\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)\| > 0$ sonucunun elde edilebileceği anlamı çıkar. Bir fonksiyonun t_0 noktasında limitinin varlığı onun yerel özelliğini yansıtır. Bu durumda $\mathbf{f}(t)$ 'ye, $t = t_0$ noktasında *sürekli vektör fonksiyon* denir. Tek değişkenli bir fonksiyon için eğri grafiğinin el kaldırmadan çizilebilmesi onun sürekli olmasının bir sonucudur.

Sürekli bir vektör fonksiyon için bileşenlerinin de sürekli olması gerek ve yeterlidir:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} x(t)\mathbf{e}_1 + \lim_{t \rightarrow t_0} y(t)\mathbf{e}_2 + \lim_{t \rightarrow t_0} z(t)\mathbf{e}_3 \quad (2.27)$$

Sürekli fonksiyonların toplamı, skaler ve vektörel çarpımları da sürekli dir.

Örnek 2.7

$\mathbf{f}(t) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}t^2$ vektör fonksiyonunda $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ sabit vektörler olsun. t_0 noktasında limit,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} (\mathbf{a} + \mathbf{b}t + \mathbf{c}t^2) = \mathbf{a} + \mathbf{b}t_0 + \mathbf{c}t_0^2 = \mathbf{f}(t_0)$$

sonucunu verdiği için t 'nin tüm değerleri için $\mathbf{f}(t)$ sürekli dir.

Örnek 2.8

Aşağıdaki vektör fonksiyonun t 'nin tüm değerleri için sürekli olup olmadığını inceleyelim.

$$\mathbf{f}(t) = \begin{cases} t \neq 1 \text{ için} & \frac{t^2 - 1}{t - 1} \mathbf{e}_1 + t^3 \mathbf{e}_2 \\ t = 1 \text{ için} & 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

$t_0 \neq 1$ için,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{f}(t) = \lim_{t \rightarrow t_0} \left(\frac{t^2 - 1}{t - 1} \mathbf{e}_1 + t^3 \mathbf{e}_2 \right) = \frac{t_0^2 - 1}{t_0 - 1} \mathbf{e}_1 + t_0^3 \mathbf{e}_2 = \mathbf{f}(t_0)$$

$t_0 = 1$ için,

$$\lim_{t \rightarrow 1} \mathbf{f}(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{t^2 - 1}{t - 1} \mathbf{e}_1 + t^3 \mathbf{e}_2 \right) = \lim_{t \rightarrow 1} ((t + 1)\mathbf{e}_1 + t^3 \mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = \mathbf{f}(1)$$

olur. Buna göre $\mathbf{f}(t)$, tüm t değerleri için sürekli dir.

2.2.1 Vektör fonksiyonun türevi

Türev, herhangi bir fonksiyonun belirli bir noktadaki eğimini veren denklemdir. Vektör fonksiyon açısından $\mathbf{f}(t)$ 'nin t_0 noktasındaki türevi t_0 ve $t_0 + \Delta t$ 'deki değerleri,

$$\begin{aligned} t = t_0 & \text{ için } \mathbf{f}(t_0) \\ t = t_0 + \Delta t & \text{ için } \mathbf{f}(t_0 + \Delta t) \end{aligned}$$

yardımıyla incelenebilir. Burada Δt , t 'deki çok küçük bir değişimi ifade etmektedir. Girdiler ve çıktılar arasındaki farkların oranı,

$$\frac{\mathbf{f}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta \mathbf{f}(t)}{\Delta t}$$

oluşturulsun. $t \rightarrow t_0$ veya $\Delta t \rightarrow 0$ için bu oranın limiti,

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)}{t - t_0} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{f}(t)}{\Delta t} \quad (2.28)$$

varsa, bulunan limit değerine $\mathbf{f}(t)$ 'nin $t = t_0$ noktasındaki türevi denir ve

$$\mathbf{f}'(t_0) = \left(\frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} \right)_{t=t_0} \quad (2.29)$$

ile gösterilir. Türevlenebilirlik, fonksiyonun t_0 'da sürekli olduğunun göstergesidir. t , t_0 'a yaklaştıkça $\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t_0)$ vektörü t_0 noktasında uzay eğrisinin teğetine dönüşür (Şekil 2.8).

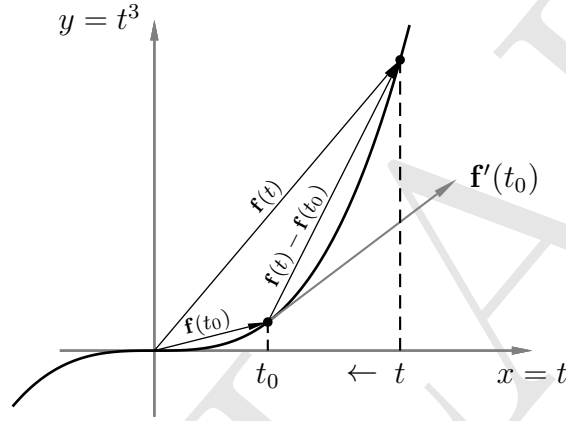
Vektör fonksiyonun bir noktadaki türevi,

$$\mathbf{f}'(t_0) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \quad (2.30)$$

bileşenlerinin türevi ile tanımlıdır. (2.30) yeniden türevlenebilir bir vektör fonksiyondur. İkinci mertebeden türev,

$$\mathbf{f}''(t_0) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right) \quad (2.31)$$

olmak üzere, daha yüksek mertebeli türevler benzer biçimde ifade edilebilir.



Şekil 2.8: Türevin geometrik yorumu

$\mathbf{f}(t)$, $\mathbf{g}(t)$ ve $h(t)$ belirli bir aralıkta tanımlı fonksiyonlar olsun. Bu fonksiyonlar için aşağıdaki türev kuralları geçerlidir:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{f} + \mathbf{g}) = \frac{d\mathbf{f}}{dt} + \frac{d\mathbf{g}}{dt} \quad (2.32)$$

$$\frac{d}{dt}(h\mathbf{f}) = h \frac{d\mathbf{f}}{dt} + \mathbf{f} \frac{dh}{dt} \quad (2.33)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \frac{d\mathbf{f}}{dt} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt} \quad (2.34)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{f} \times \mathbf{g}) = \frac{d\mathbf{f}}{dt} \times \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \frac{d\mathbf{g}}{dt} \quad (2.35)$$

Skaler değerli fonksiyonlarda olduğu gibi, belirli bir aralıkta sabit vektör değerli fonksiyonun türevi söz konusu aralığın her noktasında sifıra eşittir. Dolayısıyla, örneğin \mathbf{e} birim vektörün türevi kendisine diktir:

$$\mathbf{e} \frac{d\mathbf{e}}{dt} = 0 \quad (2.36)$$

Bileşik bir vektör fonksiyonun türevi zincir kuralı yardımıyla alınabilir:

$$\frac{d\mathbf{f}(t)}{d\theta} = \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} \frac{dt(\theta)}{d\theta} \quad (2.37)$$

Örnek 2.9

$-\infty < t < +\infty$ aralığında tanımlı,

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= t^2\mathbf{e}_1 + at\mathbf{e}_2 \\ \mathbf{g}(t) &= a \cos t\mathbf{e}_1 + b \sin t\mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

vektör fonksiyonlarının skaler çarpımlarının türevi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t)) &= \mathbf{f}'(t)\mathbf{g}(t) + \mathbf{f}(t)\mathbf{g}'(t) \\ &= (2t\mathbf{e}_1 + a\mathbf{e}_2) \cdot (a \cos t\mathbf{e}_1 + b \sin t\mathbf{e}_2) + (t^2\mathbf{e}_1 + at\mathbf{e}_2) \cdot (-a \sin t\mathbf{e}_1 + b \cos t\mathbf{e}_2) \\ &= at \cos t(2 + b) + a \sin t(b - t^2) \end{aligned}$$

Vektör fonksiyon ve türevinin uygulamadaki önemi, özellikle hareket eden nesnelerin incelenmesi sırasında karşımıza çıkar. Örneğin bir uydunun yerküre etrafındaki zamana bağlı yörünge hareketi $\mathbf{r}(t)$ yer vektörüyle; hareketin yönü ve hızı bu yer vektörünün türevi $d\mathbf{r}/dt$ ile gösterilebilir. $\mathbf{r}(t)$ uydunun mutlak konumu olduğuna göre $\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ uydunun Δt birim zamanında diferansiyel yer değiştirme vektörüdür. Söz konusu vektör Δt birim zamanına bölünürse uydunun yönünü ve ortalama hızını gösteren vektör elde edilir. t anındaki anlık hız vektörünü bulmak için, (2.28)'e uygun biçimde, birim zaman aralığı sıfıra götürülerek limit hesaplanmalıdır.

2.2.2 Taylor açılımı ve analitik fonksiyon

$[a, b]$ aralığında m . mertebeye kadar sürekli türevleri alınabilen vektör fonksiyonlara söz konusu aralıkta geçerli C^m sınıfı vektör fonksiyon denir. Türev vektör bileşenlerini de kapsadığından, tanım skaler değerli fonksiyonlar için de geçerlidir. Tüm mertebelerden türevlenebilen fonksiyonlar ise C^∞ sınıfı ile gösterilir.

t_0 başlangıç noktasına göre C^m sınıfına ait $\mathbf{f}(t)$ vektör fonksiyonu Taylor serisine,

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(t_0) + \frac{\mathbf{f}'(t_0)}{1}(t-t_0) + \frac{\mathbf{f}''(t_0)}{2}(t-t_0)^2 + \dots + \frac{\mathbf{f}^{(m)}(t_0)}{m!}(t-t_0)^m + \mathbf{R}_m(t, t_0) \quad (2.38)$$

açılabilir. Burada $\mathbf{R}_m(t, t_0)$,

$$t \rightarrow t_0 \Rightarrow \frac{\mathbf{R}_m(t, t_0)}{(t - t_0)^m} \rightarrow \mathbf{0} \quad (2.39)$$

özelliğine sahip kalan anlamındadır.

C^∞ sınıfına ait $\mathbf{f}(t)$ fonksiyonunun her m ve $[a, b]$ aralığındaki tüm t ve t_0 değerleri için Taylor açılımı (2.38) ile gösterilir. Burada, kalan $\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{R}_m(t, t_0) = \mathbf{0}$ eşitliğini sağlıyorsa söz konusu fonksiyon kuvvet serileriyle,

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{a}^n (t - t_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{f}^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n \quad (2.40)$$

ifade edilebilir. Bu durumda $t \in [a, b]$ aralığı için $\mathbf{f}(t)$ *analitik fonksiyondur*. Analitik fonksiyon, bir fonksiyonun yakınsak kuvvet serileri cinsinden yerel anlamda ifadesidir. Polinom (gerçek ya da karmaşık), oransal, trigonometrik, logaritmik ve üstel fonksiyonlar sürekli oldukları her hangi bir aralıkta analiktirler. C^∞ sınıfına ait her fonksiyonun analitik olması gerekmez.

2.3 Alıştırmalar

Alıştırma 2.1 $\mathbf{a} = (2, 1, -3)$ ve $\mathbf{b} = (-1, 1, -2)$ vektörlerinin oluşturduğu düzleme dik birim vektörü belirleyiniz.

Çözüm: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}, \mathbf{b}$ olduğundan,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{e}_1 - \det \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{e}_2 + \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{e}_3 \\ &= (-2 + 3)\mathbf{e}_1 - (-4 - 3)\mathbf{e}_2 + (2 + 1)\mathbf{e}_3 \\ &= \mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{1^2 + 7^2 + 3^2} = \sqrt{59}$$

$$\text{Birim vektör: } \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|} = \frac{1}{\sqrt{59}} (\mathbf{e}_1 + 7\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3)$$

Alıştırma 2.2 $\mathbf{f} = \sin t \mathbf{e}_2 + e^t \mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{g} = 2\mathbf{e}_1 + (t^2 + 1)\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3$ vektörleri tanımlı olduğuna göre;

- $\frac{d}{dt} [\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}] = ?$
- $\frac{d}{dt} [\mathbf{f} \times \mathbf{g}] = ?$

Çözüm: (2.34) ve (2.35)'e göre;

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) &= \frac{d\mathbf{f}}{dt} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt} \\ \frac{d}{dt} (\mathbf{f} \times \mathbf{g}) &= \frac{d\mathbf{f}}{dt} \times \mathbf{g} + \mathbf{f} \times \frac{d\mathbf{g}}{dt}\end{aligned}$$

eşitlikleri geçerlidir. Türevler oluşturulur,

$$\begin{aligned}\mathbf{f} &= \sin t \mathbf{e}_2 + e^t \mathbf{e}_3 & \mathbf{g} &= 2\mathbf{e}_1 + (t^2 + 1)\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3 \\ \mathbf{f}' &= \cos t \mathbf{e}_2 + e^t \mathbf{e}_3 & \mathbf{g}' &= 2t\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

ve yukarıdaki eşitliklerde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}] &= (2\mathbf{e}_1 + (t^2 + 1)\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3) \cdot (\cos t \mathbf{e}_2 + e^t \mathbf{e}_3) + (\sin t \mathbf{e}_2 + e^t \mathbf{e}_3) \cdot (2t\mathbf{e}_2) \\ &= (t^2 + 1) \cos t + 5e^t + 2t \sin t\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} [\mathbf{f} \times \mathbf{g}] &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & \cos t & e^t \\ 2 & (t^2 + 1) & 5 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 0 & \sin t & e^t \\ 0 & 2t & 0 \end{pmatrix} \\ &= (5 \cos t - e^t(t^2 + 2t + 1))\mathbf{e}_1 + 2e^t \mathbf{e}_2 - 2 \cos t \mathbf{e}_3\end{aligned}$$

sonuçları elde edilir.

Alıştırma 2.3 $\mathbf{f}(t) = \sin t \mathbf{e}_1 + (t^2 + 1)\mathbf{e}_2$ vektör fonksiyonunu $t_0 = \pi/2$ için 3. dereceye kadar Taylor serisine açınız.

Sonuç:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(t) &= (\mathbf{e}_1 + (\frac{\pi^2}{4} + 1)\mathbf{e}_2) + \pi \mathbf{e}_2 (t - \frac{\pi}{2}) + \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_1 + 2\mathbf{e}_2)(t - \frac{\pi}{2})^2 \\ &= (1 - \frac{1}{2}(t - \frac{\pi}{2})^2)\mathbf{e}_1 + (1 + t^2)\mathbf{e}_2\end{aligned}$$

Alıştırma 2.4 $\mathbf{a} = 5\mathbf{e}_1 + 4\mathbf{e}_2$ ve $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2$ vektörleri verilsin. Yandaki şekle göre;

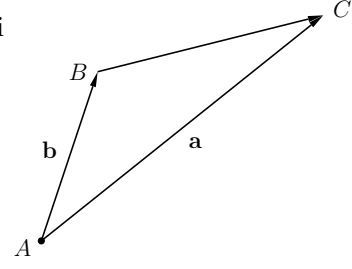
- A noktasındaki iç açıyı
- ABC üçgeninin alanını

belirleyiniz.

Çözüm:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \quad \theta = 32.9^\circ$$

$$F = \frac{1}{2} \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \frac{11}{2}$$



Alıştırma 2.5 $\mathbf{A} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{k}$ verildiğine göre aşağıdaki vektör işlemlerini sonuçlandırınız:

- $\|\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C}\| = ?$
- \mathbf{A} ve \mathbf{C} vektörleri arasındaki açı
- \mathbf{A} , \mathbf{B} ve \mathbf{C} vektörlerinin skaler üçlü çarpımı

Sonuç:

$$\|\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + \mathbf{C}\| = 3\sqrt{10}$$

$$\theta_{AC} = 75.636697^\circ$$

$$[\mathbf{A} \ \mathbf{B} \ \mathbf{C}] = 7$$

Alıştırma 2.6 $P_0 = (1, 2, 2)$ noktasından geçen ve $\mathbf{t} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ vektörüne paralel doğrunun denklemini oluşturunuz. $(10, -1, 16)$ noktasının bu doğru üzerinde olup olmadığını belirleyiniz.

Çözüm:

Bir doğruya paralel olan vektöre doğrunun doğrultman vektörü denir. (x_0, y_0, z_0) noktasından geçen ve (a, b, c) vektörüne paralel doğrunun kartezyen ve parametrik denklemleri:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

$$x = x_0 + at$$

$$y = y_0 + bt$$

$$z = z_0 + ct$$

Buna göre,

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z - 2}{5}$$

$$x = 1 + 3t$$

$$y = 2 - t$$

$$z = 2 + 5t$$

(10,-1,16) noktası doğru denklemini sağlamadığından doğru üzerinde değildir.

Alıştırma 2.7 $\mathbf{a} = \mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 3\mathbf{e}_3$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3$ ve $\mathbf{c} = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ vektörleri verilsin. Aşağıdaki vektör işlemlerini sonuçlandırınız.

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = ?$

2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c} = [\mathbf{abc}] = ?$

Sonuç:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (5, 7, 3) \quad [\mathbf{abc}] = 10$$

Alıştırma 2.8 $\mathbf{f}(t) = \cos t \mathbf{e}_1 + (t^2 + 2t + 1)\mathbf{e}_2$ vektör fonksiyonunu $t = 0$ için ilk dört terime kadar Taylor serisine açınız.

Sonuç:

$$\mathbf{f}(t) = (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + 2\mathbf{e}_2 t + \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)t^2 + \frac{1}{24}\mathbf{e}_1 t^4$$

Alıştırma 2.9 $a = \|\mathbf{a}\|$ uzunluğunu veren kosinüs teoremi bağıntısını \mathbf{b} , \mathbf{c} ve θ elemanlarını kullanarak vektörlerin skaler çarpımı kuralından elde ediniz.

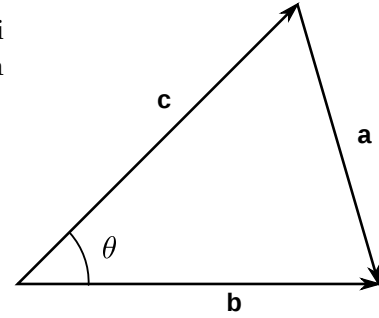
Çözüm: Vektörlerin farkından,

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$$

$$\|\mathbf{a}\|^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c})$$

$$= \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - 2 \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

$$= \|\mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{c}\|^2 - 2\|\mathbf{b}\|\|\mathbf{c}\| \cos \theta$$

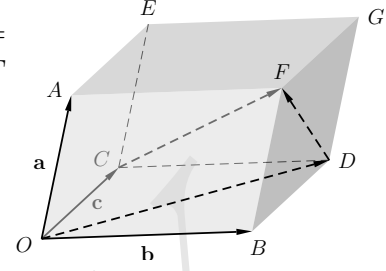


Alıştırma 2.10 $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$ ve $\mathbf{b} = (2, 3, 4)$ vektörleriyle tanımlanan paralelkenarın alanını hesaplayınız.

Sonuç:

$$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \sqrt{6}$$

Alıştırma 2.11 Yandaki şekilde $\mathbf{a} = \vec{OA}$, $\mathbf{b} = \vec{OB}$, $\mathbf{c} = \vec{OC}$ eşilikleri geçerli olduğuna gore, \vec{OD} , \vec{DF} , \vec{CF} vektorlerini \mathbf{a} , \mathbf{b} ve \mathbf{c} cinsinden bulunuz.



TASLAK

Bölüm 3

GENEL EĞRİ TEORİSİ

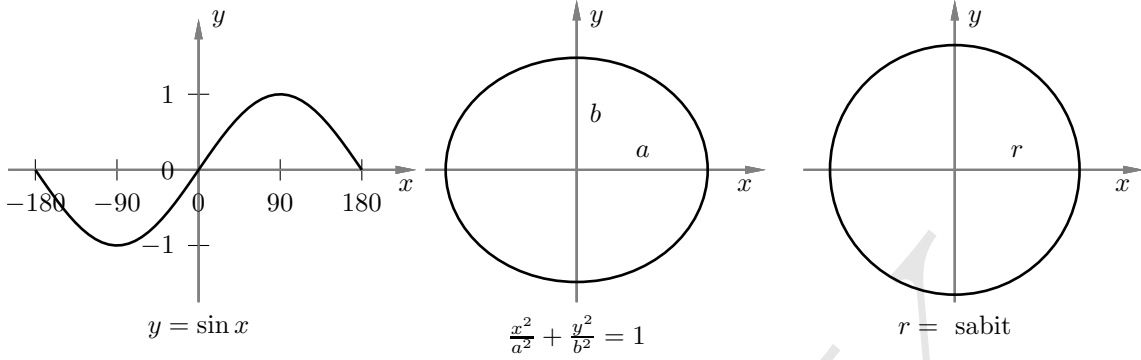
En sade biçimiyle matematikte eğri kavramı, *tek boyutlu* ve *süreklili* bir geometrik nesneyi ifade etmek için kullanılır. Kavram aynı zamanda matematiksel bir fonksiyonun grafiğiyle eş anlamlı kullanılır. Verilen tanım doğruyu, kareyi, çoklu doğruları vb. geometrik nesnelere içine alsın da, bunlar eğrilerin özel durumları olup diferansiyel geometrinin konuları arasında yer almazlar; başka bir deyişle düzenli parametrik eğri değildir.

Bu bölümde Öklit uzayındaki eğrilerin diferansiyel geometrisi hakkında bilgi edinmek için 1. bölümde anlatılan konulardan yararlanacağız. Konulara ilişkin örnekler iki ya da üç boyutlu uzay için verilse de n boyutlu uzaya genelleştirilebilirler.

3.1 Eğrinin Parametrik Gösterimi

Düzlemde, $y = \sin x$ açık fonksiyonu sinüs eğrisini, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kapalı fonksiyonu yarıksen uzunlukları a ve b olan bir elipsi, r kutupsal koordinat elemanı olmak üzere $r = \text{sabit}$ eğrisi r yarıçaplı bir daireyi tanımlar (bak. Şekil 3.1). Bu üç farklı matematiksel ifade düzlem analitik geometride bir eğri için kullanılan yaygın gösterim biçimleridir. Öte yandan, aynı eğriler x , y ve r 'nin bağımlı olduğu bir başka değişken ya da değişkenler ile de tanımlanabilir. Aşağıda kinematik esaslardan yola

çıkarak eğrilerin parametrik denklemlerle gösterimi ele alınmaktadır.



Şekil 3.1: Analitik geometride eğrinin değişik gösterim biçimleri

Öklit uzayında bir eğriyi hareketli bir noktanın izlediği yol olarak düşünebiliriz. Noktanın \mathbb{E}^3 'deki koordinatları (x, y, z) kapalı bir $[a, b]$ aralığındaki t değişkenine bağlı üç sürekli fonksiyonla ifade edilebilir:

$$x = x(t) \quad , \quad y = y(t) \quad , \quad z = z(t) \quad ; \quad a \leq t \leq b \quad (3.1)$$

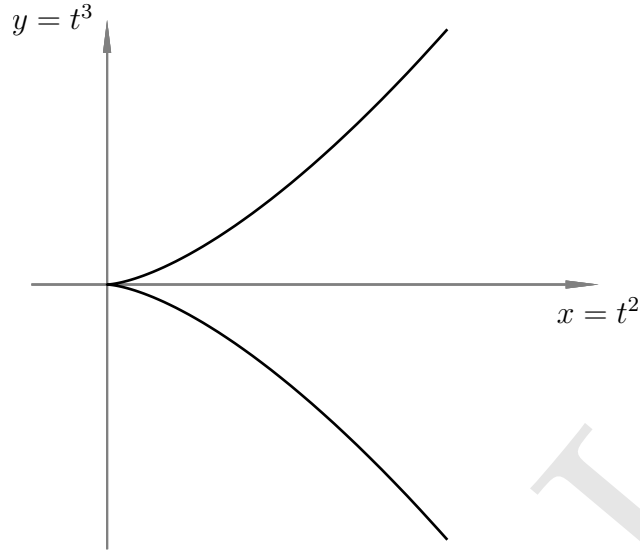
t değişkenine *eğrinin parametresi* denir. Bu eğri aslında (2.23) ile gösterilen $\mathbf{f}(t)$ vektör fonksiyonunun tanımladığı noktalar kümesidir. $\mathbf{f}(t)$ fonksiyonunun kendisine ya da $x(t), y(t), z(t)$ fonksiyon üçlüsüne *eğrinin parametrik gösterimi* denir.

Düzenli parametrik eğri, $t \in [a, b]$ aralığında,

- birinci türevi mevcut (C^1 sınıfı) ve
- sıfırdan farklı ($\mathbf{f}'(t) \neq \mathbf{0}$)

bir vektör fonksiyonu $\mathbf{f}(t)$ veya onun görüntü kümesidir. Fonksiyonun türevinin bulunmadığı veya sıfır vektörüne eşit olduğu noktalar, tekil (singular) noktalar olarak adlandırılır. Şekil 3.2, Neil parabolü adı verilen eğrinin $t = 0$ için düzenli olmadığını göstermektedir. $t \neq 0$ olan noktalarda, $\mathbf{f}'(t) \neq \mathbf{0}$ durumu eğrinin kırılmadığını, yumuşak bir görünüme sahip olduğunu ve yerel anlamda bir doğru ile eğrinin diğer noktalarına yaklaşılabileceğini bize söyler. Matematiksel jeodezinin konusunu bu tür eğriler oluşturur. Dolayısıyla, buradaki ilgi alanımız tekil nokta içermeyen eğriler ile sınırlıdır.

$[a, b]$ aralığında düzenli bir parametrik eğri, $\mathbf{f}(t_1) = \mathbf{f}(t_2)$ eşitliğini geçerli kılan birden fazla noktaya ($t_1 \neq t_2$) sahip olabilir. Fonksiyon değerlerinin eşitliği, ilgili noktalarda fonksiyonun aynı yerel özelliklere sahip olduğu anlamına gelmez: $\mathbf{f}'(t_1) \neq \mathbf{f}'(t_2)$.

Şekil 3.2: Neil parabolünde tekil nokta ($t = 0$)

3.2 Eğrinin Yay Uzunluğu

Bir eğriye ilişkin söylenebilecek önemli geometrik bilgilerin başında, eğrinin belirli bir aralıktaki uzunluğu gelir. $t \in [a, b]$ aralığında, $\mathbf{f}(t)$ fonksiyonunun izi, C eğrisinin yay uzunluğu belirlenmek istensin. Eğriyi,

$$a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = b$$

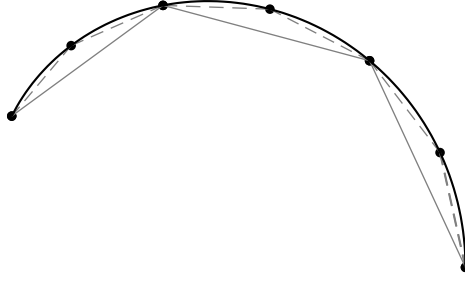
noktaları yardımıyla yeterince küçük parçalara ayırdığımızı düşünelim (Şekil 3.3). Bu noktaları ardışık olarak birbirine bağlayan doğru parçalarının (kiriş) toplam uzunluğu,

$$\sum_{i=1}^n \|\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})\| \quad (3.2)$$

C 'nin gerçek yay uzunluğuna yaklaşık bir sonuç verir. İstenildiği kadar kısa ya da uzun seçilebilen kiriş uzunluklarının oluşturduğu poligon geçkilerinin S uzunluk değerleri kümesindeki olası en büyük sayı (supremum¹), gerçek yay uzunluğuna eşit olur. Yay uzunluğu, $[a, b]$ aralığındaki diferansiyel kiriş uzunlukları toplamı,

$$s(t) = \int_a^b \|\mathbf{f}'(t)\| dt \quad (3.3)$$

¹Bir gerçek sayı kümesinin alabileceği en küçük üst sınır anlamındadır. Örneğin, $\sup \{1, 2, 3\} = 3$.



Şekil 3.3: Kiriş elemanları yardımıyla yay uzunluğunun belirlenmesi

veya daha açık biçimde,

$$s(t) = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad (3.4)$$

ile gösterilir.

Örnek 3.1

$0 \leq t \leq 2\pi$ aralığında daire yayı uzunluğunu hesaplayalım. Dairenin vektör fonksiyonu:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= r \cos t \mathbf{e}_1 + r \sin t \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}'(t) &= -r \sin t \mathbf{e}_1 + r \cos t \mathbf{e}_2 \\ \|\mathbf{f}'(t)\| &= r \\ s(t) &= \int_0^{2\pi} r dt = rt \Big|_0^{2\pi} = 2\pi r \end{aligned}$$

Örnek 3.2

Vektör fonksiyonu,

$$\mathbf{f}(t) = [e^t \cos t, e^t \sin t]$$

olarak verilen Logaritmik spiral eğrisinin (Şekil 3.4) uzunluğunu veren bağıntıyı bulalım.

$$\mathbf{f}'(t) = [e^t \cos t - e^t \sin t, e^t \sin t + e^t \cos t] = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$$

ve normu,

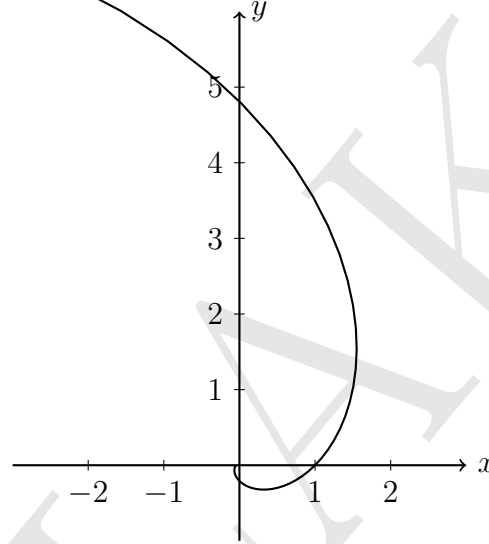
$$\begin{aligned} \|\mathbf{f}'(t)\| &= e^t \sqrt{(\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2} \\ &= e^t \sqrt{2} \end{aligned}$$

sonucunu verir. Bu durumda, eğrinin yay uzunluğunu veren bağıntı için,

$$s(t) = \int_0^t e^t \sqrt{2} dt = \sqrt{2} e^t \Big|_0^t = \sqrt{2}(e^t - 1)$$

bulunur.

$$\mathbf{f}(t) = [e^t \cos t, e^t \sin t]$$



Şekil 3.4: Logaritmik spiral

Örnek 3.3

Vektör fonksiyonu,

$$\mathbf{f}(t) = [\cos t, \sin t, t]$$

olarak verilen helis eğrisinin (Şekil 2.7) uzunluğunu veren bağıntıyı bulalım.

$$\mathbf{f}'(t) = [-\sin t, \cos t, 1]$$

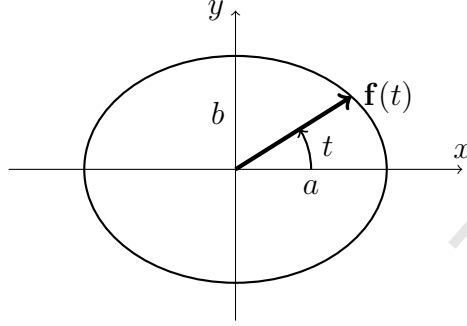
ve normu,

$$\|\mathbf{f}'(t)\| = \sqrt{2}$$

sonucunu verir. Bu durumda, eğrinin yay uzunluğu:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{2} dt = \sqrt{2} t \Big|_0^t = \sqrt{2} t$$

Yay uzunluğu hesabında, (3.3) integral sonucu her zaman kapalı bir eşitlik vermez. Çember, parabol, zincir eğrisi (catenary), çevrim eğrisi (cycloid) ve yukarıdaki örnekten anlaşıldığı gibi logaritmik spiral kapalı eşitlikleri var olan bazı eğri türleridir. Yay uzunluğunun bulunması için sayısal integrasyonu zorunlu kılan en önemli eğrilerin başında elips gelir.



Şekil 3.5: Elips

Şekil 3.5'de görülen elipsin vektör fonksiyonu,

$$\mathbf{f}(t) = a \cos t \mathbf{e}_1 + b \sin t \mathbf{e}_2 \quad (3.5)$$

biçimindedir.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(t) &= -a \sin t \mathbf{e}_1 + b \cos t \mathbf{e}_2 \\ \|\mathbf{f}'(t)\| &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \\ s(t) &= \int_0^t \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \, dt \end{aligned}$$

$s(t)$ eliptik integral olup elemanter çözümü yoktur. Nümerik integrasyon ile ya da Taylor serisine açılıp terim terim integrasyon yapılarak yaklaşık bir çözüme ulaşılır.

Nümerik integrasyon için giriş uzunluğu gereklidir.

$$\Delta \mathbf{f} = \mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1}) = a(\cos t_i - \cos t_{i-1}) \mathbf{e}_1 + b(\sin t_i - \sin t_{i-1}) \mathbf{e}_2$$

$$\|\Delta \mathbf{f}\| = \sqrt{a^2(\cos t_i - \cos t_{i-1})^2 + b^2(\sin t_i - \sin t_{i-1})^2}$$

Yay uzunluğu:

$$s(t) = \sum_{i=1}^{i=n} \sqrt{a^2(\cos t_i - \cos t_{i-1})^2 + b^2(\sin t_i - \sin t_{i-1})^2} \quad (3.6)$$

$\Delta t = t_i - t_{i-1}$ değeri küçüldükçe hesaplanan yay uzunluğunun doğruluğu artar.

Örnek 3.4

Şekil 3.5’de t parametresi yerine indirgenmiş enlem β alırsa, (3.5) meridyen elipsinin parametrik gösterimine dönüşür (Üstün ve Demirel, 2015). İndirgenmiş enlem ile coğrafi enlem φ arasındaki ilişki,

$$\tan \beta = \frac{b}{a} \tan \varphi$$

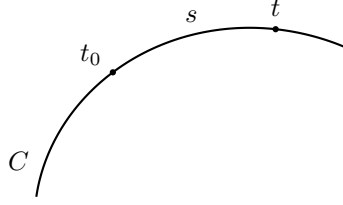
şeklindedir. GRS80 elipsoiti için ekvatoradan itibaren 1° coğrafi enlemine kadar yay uzunluğunu hesaplayalım ($a=6378137$ m, $b=6356752.3141$ m).

$\varphi = 1^\circ$ ise $\beta = 0.996648^\circ$ olur. Yayı 15 parça hâlinde hesaplırsak $\Delta\beta = 0.066443^\circ$ alınmalıdır. (3.6) uygulanarak yay uzunluğu bulunur.

i	β_i°	$\ \Delta\mathbf{f}\ $ (m)
0	0.000000	
1	0.066443	7371.623
2	0.132886	7371.623
3	0.199330	7371.623
4	0.265773	7371.623
5	0.332216	7371.624
6	0.398659	7371.624
7	0.465102	7371.624
8	0.531546	7371.625
9	0.597989	7371.625
10	0.664432	7371.626
11	0.730875	7371.627
12	0.797318	7371.627
13	0.863761	7371.628
14	0.930205	7371.629
15	0.996648	7371.630
Toplam		110574.382

Üstün ve Demirel (2015)’de verilen seri açılımı ile hesap yapılırsa 110574.38 m bulunur. $\Delta\beta$ daha küçük alınarak daha iyi bir sonuç alınabilir.

$\mathbf{f}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ düzenli bir C eğrisinin vektör fonksiyonu olsun. C eğrisi üzerinde keyfi bir t_0 başlangıç noktası ve bu başlangıca göre keyfi bir yönü pozitif seçelim (Şekil 3.6). $t > t_0$ olacak şekilde eğri üzerinde belirlenen herhangi bir noktanın başlangıca uzaklığı, başka bir deyişle yay parçası uzunluğu ($s > 0$), bu eğrinin parametresi olarak t yerine kullanılabilir. $t < t_0$ ise bu durumda yay uzunluğu eksi işaretli ($s < 0$) olur. s ’nin büyüme yönü, genellikle t ’ninki ile aynıdır.



Şekil 3.6: Parametre olarak yay uzunluğu

$t \geq t_0$ olmak üzere (3.3)'ün t 'ye göre türevi alınacak olursa,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \left\| \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} \right\| dt = \left\| \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} \right\| \quad (3.7)$$

eşitliği ilgili aralıkta parametre değişikliğinin yapılabileceğini gösterir. (3.3) ile elde edilecek $s = s(t)$ 'ye *yay parametresi* veya *doğal parametre* denir. Doğal parametreye göre vektör fonksiyonun *doğal gösterimi*,

$$\mathbf{f}(t(s)) = x(t(s))\mathbf{e}_1 + y(t(s))\mathbf{e}_2 + z(t(s))\mathbf{e}_3 \quad (3.8)$$

olur. Bu durumda (3.8)'nin normu,

$$\left\| \frac{d\mathbf{f}}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right\| \left\| \frac{dt}{ds} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right\| / \left\| \frac{ds}{dt} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right\| / \left\| \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right\| = 1 \quad (3.9)$$

sonucunu verir. Aynı sonuca, doğal parametreye göre teğet vektörün bileşenleri yardımıyla da,

$$\left\| \frac{d\mathbf{f}}{ds} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2}} = 1 \quad (3.10)$$

ulaşılabilir.

Örnek 3.5

Örnek 3.2'deki logaritmik spiralin $[0, t]$ aralığındaki yay uzunluğu,

$$s(t) = \int_0^t e^t \sqrt{2} dt = \sqrt{2} e^t \Big|_0^t = \sqrt{2}(e^t - 1)$$

olarak bulunmuştu. Doğal parametreye dayalı gösterim için yay uzunluğu denkleminde t , s 'ye bağlı olarak yazılırsa,

$$e^t = \frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \quad \Rightarrow \quad t = \ln(s/\sqrt{2} + 1)$$

çıkar. Buna göre doğal parametrik gösterim,

$$\mathbf{f}(s) = (s/\sqrt{2} + 1) \cos \ln(s/\sqrt{2} + 1) \mathbf{e}_1 + (s/\sqrt{2} + 1) \sin \ln(s/\sqrt{2} + 1) \mathbf{e}_2$$

olur.

Jeodezik uygulamalarda, doğal parametrenin önemi temel ödev çözümlerinde ortaya çıkar. Elipsoit yüzeyinde iki noktadan geçen yüzey eğrisi analitik bir fonksiyondur. Bu eğri üzerinde bir başlangıç noktasına göre ikinci bir nokta, aralarındaki yay parçası uzunluğuna (Δs 'ye) göre yakınsak Taylor serileriyle tanımlanabilir:

$$\mathbf{f}(s_0 + \Delta s) = \mathbf{f}(s_0) + \frac{\mathbf{f}'(s_0)}{1!} \Delta s + \frac{\mathbf{f}''(s_0)}{2!} \Delta s^2 + \frac{\mathbf{f}'''(s_0)}{3!} \Delta s^3 + \dots \quad (3.11)$$

3.3 Teğet Birim Vektör ve Normal Düzlem

Bir uzay eğrisinin herhangi bir noktadaki türevi, eğrinin o noktadaki teğetini verir. Parametrik olarak $\mathbf{f}(t)$ vektör fonksiyonuyla gösterilen bir eğrinin türevi ise daha önce (2.29) ile verilmişti. Burada, $\mathbf{f}(t)$ en az C^1 sınıfında düzenli bir eğri olmalıdır.

$t = t_0$ noktasında teğet vektör ile aynı yönlü birim vektör,

$$\mathbf{t}(t_0) = \frac{\mathbf{f}'(t_0)}{\|\mathbf{f}'(t_0)\|} \quad (3.12)$$

ile bulunur. $\mathbf{f}(t)$ zamanına bağlı olarak hareketli bir kitlenin konumunu temsil ettiği varsayılırsa, türevin normu $\|\mathbf{f}'(t_0)\|$, bu cismin $t = t_0$ anındaki hızıdır. Eğer vektör fonksiyon doğal parametre, bir başka deyişle eğrinin uzunluğu (s) cinsinden ifade edilmişse birim vektör daha basit bir görünüm alır:

$$\mathbf{t}(s) = \mathbf{f}'(s) \quad (3.13)$$

Matematiksel gösterimde, herhangi bir parametre ile doğal parametreye göre alınan türevleri birbirinden ayırt etmek için, türev işareti için sırasıyla üs,

$$\mathbf{f}' = \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} \quad , \quad \mathbf{f}'' = \frac{d^2\mathbf{f}(t)}{dt^2} \quad \text{vb.}$$

ve üzeri nokta,

$$\dot{\mathbf{f}} = \frac{d\mathbf{f}(s)}{ds} \quad , \quad \ddot{\mathbf{f}} = \frac{d^2\mathbf{f}(s)}{ds^2} \quad \text{vb.}$$

kullanılır. Aksi belirtilmedikçe, sonraki bölümlerde bu kurala uyulacaktır.

Örnek 3.6

$\mathbf{f}(t) = a \cos t \mathbf{e}_1 + a \sin t \mathbf{e}_2 + b t \mathbf{e}_3$ vektör fonksiyonunun birim teğet vektörünü, t ve doğal parametre s için bulalım.

Öncelikle türev yardımıyla $\mathbf{f}(t)$ 'nin teğet vektörünü elde edelim:

$$\mathbf{f}'(t) = -a \sin t \mathbf{e}_1 + a \cos t \mathbf{e}_2 + b \mathbf{e}_3$$

Teğet vektörün normu,

$$\|\mathbf{f}'(t)\| = \sqrt{a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

olur. Buna göre teğet birim vektör için,

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{f}'(t)}{\|\mathbf{f}'(t)\|} = (a^2 + b^2)^{-1/2} [-a \sin t \mathbf{e}_1 + a \cos t \mathbf{e}_2 + b \mathbf{e}_3]$$

sonucu çıkar.

Aynı sonuç doğal parametre s için de bulunabilir. Bunun için öncelikle $\mathbf{f}(t)$ doğal parametre cinsinden gösterilmelidir. (3.3)'e göre $t = 0$ ve $t = t$ aralığında kalan eğri uzunluğu,

$$s = \int_0^t \sqrt{a^2 + b^2} dt = t \sqrt{a^2 + b^2}$$

sonucunu verir. Buradan t çekilir,

$$t = \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

ve $\mathbf{f}(t)$ 'de yerine yazılırsa, doğal parametreye göre vektör fonksiyon,

$$\mathbf{f}(s) = a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{e}_1 + a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{e}_2 + b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{e}_3$$

biçiminde gösterilir. s 'ye göre türev,

$$\begin{aligned} \mathbf{t} = \dot{\mathbf{f}}(s) &= -\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{e}_1 + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{e}_2 + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{e}_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \left[-a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{e}_1 + a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{e}_2 + b \mathbf{e}_3 \right] \\ &= (a^2 + b^2)^{-1/2} [-a \sin t \mathbf{e}_1 + a \cos t \mathbf{e}_2 + b \mathbf{e}_3] \end{aligned}$$

doğrudan doğruya teğet birim vektöre karşılık gelir.

Düzenli bir C eğrisi üzerinde t_0 ile belirli $\mathbf{f}_0 = [x(t_0), y(t_0), z(t_0)]$ başlangıç noktasından geçen teğet vektöre paralel vektör,

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + k\mathbf{t}_0 \quad , \quad k \in \mathbb{R} \quad (3.14)$$

ile tanımlıdır. Burada \mathbf{f} , teğet vektör üzerindeki bir noktanın konum vektörü; k , bu nokta ile başlangıç noktası arasında kalan ve teğet vektör boyunca ölçülen doğru parçası uzunluğudur. \mathbf{f}_0 'daki teğet doğrunun skaler parametrik denklemleri,

$$x = x_0 + kx'(t_0) \quad , \quad y = y_0 + ky'(t_0) \quad , \quad z = z_0 + kz'(t_0) \quad (3.15)$$

olduğuna göre *teğet doğru denklemi*,

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)} \quad (3.16)$$

eşitliği ile gösterilir.

Teğet vektöre \mathbf{f}_0 noktasında her yönde dik vektörlerin oluşturmuş olduğu düzleme *normal düzlem* adı verilir. Söz konusu düzlem vektörel olarak,

$$(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)\mathbf{t}_0 = \mathbf{0} \quad (3.17)$$

eşitliği ile ifade edilirken, skaler büyüklükler cinsinden karşılığı,

$$(x - x_0)x'(t_0) + (y - y_0)y'(t_0) + (z - z_0)z'(t_0) = 0 \quad (3.18)$$

olur.

Örnek 3.7

$\mathbf{f}(t) = 3t^3\mathbf{e}_1 + 2t^2\mathbf{e}_2 + t\mathbf{e}_3$ eğrisine $t = 1$ 'deki teğetin denklemini ve bu noktadaki normal düzlemi bulalım.

Vektör fonksiyonun skaler bileşenleri $x(t) = 3t^3$, $y(t) = 2t^2$ ve $z(t) = t$ olduğuna göre türevleri,

$$x'(t) = 9t^2 \quad , \quad y'(t) = 4t \quad , \quad z'(t) = 1$$

dir. $\mathbf{f}(t)$ 'nin bileşenleri ve türevlerinin $t = 1$ 'deki değerleri,

$$\begin{array}{lll} x(1) = 3 & y(1) = 2 & z(1) = 1 \\ x'(1) = 9 & y'(1) = 4 & z'(1) = 1 \end{array}$$

sonucunu verdiğinden, söz konusu noktadaki teğet doğrunun denklemi (3.16)'e göre,

$$\frac{x - 3}{9} = \frac{y - 2}{4} = \frac{z - 1}{1}$$

ve normal düzlemin denklemi (3.18)'ya göre,

$$9(x - 3) + 4(y - 2) + z - 1 = 0$$

eşitliği olarak elde edilir.

Örnek 3.8

$\mathbf{f}(t) = a \cos t \mathbf{e}_1 + a \sin t \mathbf{e}_2 + bt \mathbf{e}_3$ eğrisine $t_0 = \frac{\pi}{4}$ 'deki teğetin ve normal düzlemin denklemini bulalım.

Vektör fonksiyonun skaler bileşenleri $x(t) = a \cos t$, $y(t) = a \sin t$ ve $z(t) = bt$ olduğuna göre türevleri,

$$x'(t) = -a \sin t \quad , \quad y'(t) = a \cos t \quad , \quad z'(t) = b$$

dir. $\mathbf{f}(t)$ 'nin bileşenleri ve türevlerinin $t_0 = \frac{\pi}{4}$ 'deki değerleri,

$$\begin{aligned} x(t_0) &= a \frac{\sqrt{2}}{2} & y(t_0) &= a \frac{\sqrt{2}}{2} & z(t_0) &= b \frac{\pi}{4} \\ x'(t_0) &= -a \frac{\sqrt{2}}{2} & y'(t_0) &= a \frac{\sqrt{2}}{2} & z'(t_0) &= b \end{aligned}$$

teğet doğrunun denklemi (3.16)'e göre,

$$\begin{aligned} \frac{x - a \frac{\sqrt{2}}{2}}{-a \frac{\sqrt{2}}{2}} &= \frac{x - a \frac{\sqrt{2}}{2}}{a \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{z - b \frac{\pi}{4}}{b} \\ \frac{2x - a\sqrt{2}}{-a\sqrt{2}} &= \frac{2y - a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{4z - b\pi}{4b} \end{aligned}$$

ve normal düzlemin denklemi (3.18)'ya göre,

$$\begin{aligned} (x - a\sqrt{2})(-a\sqrt{2}) + (y - a\sqrt{2})a\sqrt{2} + (z - \frac{b\pi}{4})b &= 0 \\ -a\sqrt{2}x + a\sqrt{2}y + 2bz - b^2 \frac{\pi}{2} &= 0 \end{aligned}$$

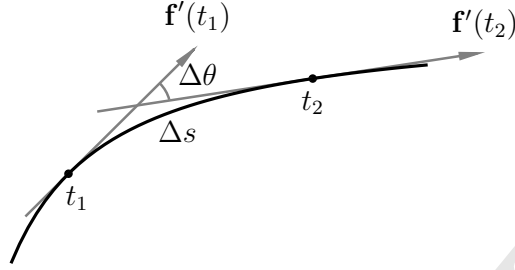
eşitliği olarak elde edilir.

3.4 Eğrilik

Verilen bir uzay eğrisi üzerinde birbirine sonsuz anlamda yakın t_1 ve t_2 noktalarından geçen teğet doğrular arasındaki sapma açısının $t_1 t_2$ yay uzunluğuna oranı,

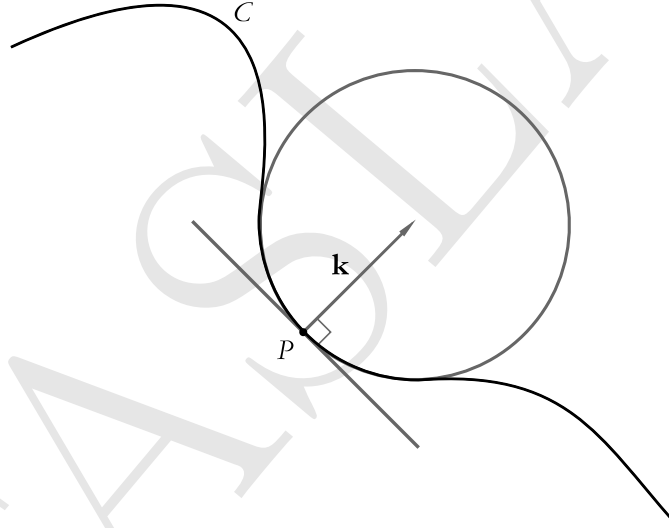
$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta s} = \frac{d\theta}{ds} = \kappa \quad (3.19)$$

eğri parçasının ortalama eğriliğidir. Şekil 3.7'den de anlaşılacağı gibi eğrilik, eğrinin teğet doğrudan (veya düzlemde) ne kadar uzaklaştığının bir ölçütüdür. Bu anlamda eğrilik değeri küçüldükçe uzay eğrisi doğruya yaklaşır, büyüdüğüçe daha kapalı bir görünüme sahip olur. Şekil 3.8 uzay eğrisinin P noktasındaki eğriliğini tanımlayan



Şekil 3.7: Eğriliğin geometrik yorumu

teğet doğruyu ve ona dik doğrultudaki eğrilik vektörünü göstermektedir. Eğrilik vektörü \mathbf{k} aynı noktada bu doğruya teğet çemberin yarıçap vektörüyle aynı yönü işaret eder. Eğrilik çemberi teğet ve eğrilik vektörlerinden geçen oskülatör düzlemi üzerinde yer aldığından *oskülatör çemberi* olarak da adlandırılır.



Şekil 3.8: Eğrilik vektörü ve oskülatör çemberi

Eğrilik vektörü, birim teğet vektörün s doğal parametre veya herhangi bir t değişkenine göre türevi,

$$\mathbf{k} = \dot{\mathbf{t}}(s) = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} / \frac{ds}{dt} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} / \left\| \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt} \right\| \quad (3.20)$$

yardımla bulunur. \mathbf{k} , uzay eğrisini ifade eden vektör fonksiyonun iki kez türevi alınarak elde edileceğinden eğrinin ait olduğu sınıf en az iki olmalıdır. \mathbf{t} 'nin birim vektör olduğu göz önüne alındığında, (2.36)'ye göre bu birim vektör (3.20) ile bulunan vektöre diktir. Bu nedenle, \mathbf{k} aynı zamanda P noktasından geçen normal düzlemin içinde yer alır.

Eğrilik vektörünün yönü C uzay eğrisinin P noktasında hangi yöne doğru ilerlediğini gösterir. Yön, eğrinin bu noktada konkav (içbükey) olduğu taraftadır. Eğrilik vektörünün büyüklüğü,

$$\kappa = \|\mathbf{k}\| \quad (3.21)$$

aynı noktadaki eğrilik değerini verir. Söz konusu noktada uzay eğrisiyle aynı eğrilik değerine sahip çemberin yarıçapı, bir başka deyişle *eğrilik yarıçapı*,

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\|\mathbf{k}\|} \quad (3.22)$$

eşitliği ile hesaplanır.

Keyfi bir t parametresi ile gösterilen $\mathbf{f} = \mathbf{f}(t)$ vektör fonksiyonunun eğriliği,

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\|}{\|\mathbf{f}'\|^3} \quad (3.23)$$

bağıntısı ile eğrilik vektörü belirlenmeksizin doğrudan elde edilebilir.

Teorem 3.1 *Eğriliği her noktasında sıfıra eşit çıkan uzay eğrisi bir doğrudur.*

Örnek 3.9

Düzlem çember için vektör fonksiyon $\mathbf{f}(\theta) = r \cos \theta \mathbf{e}_1 + r \sin \theta \mathbf{e}_2$ olduğuna göre eğrilik ve eğrilik yarıçapını belirleyelim.

Çember için teğet vektör ve normu,

$$\mathbf{f}'(\theta) = -r \sin \theta \mathbf{e}_1 + r \cos \theta \mathbf{e}_2 \quad , \quad \left\| \frac{d\mathbf{f}(\theta)}{d\theta} \right\| = \|\mathbf{f}'(\theta)\| = r$$

dir. Buradan birim teğet vektör,

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{f}'(\theta)}{\|\mathbf{f}'(\theta)\|} = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2$$

olarak elde edilir. (3.20) eşitliği yardımıyla eğrilik vektörü,

$$\mathbf{k} = \dot{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{t}}{d\theta} / \left\| \frac{d\mathbf{f}(\theta)}{d\theta} \right\| = -\frac{1}{r}(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2)$$

çıkar. Sonuç olarak sırasıyla eğrilik ve eğrilik yarıçapı için,

$$\kappa = \|\mathbf{k}\| = \frac{1}{r} \quad , \quad \rho = \frac{1}{\kappa} = r$$

bulunur. Buradan çember için eğriliğin tün noktalarda sabit olduğu görülmektedir.

Örnek 3.10

$\mathbf{f}(t) = a \cos t \mathbf{e}_1 + b \sin t \mathbf{e}_2$ vektör fonksiyonu ile verilen elipsin eğriliğini ve eğrilik yarıçapını bulalım.

Vektör fonksiyonun birinci ve ikinci türevleri,

$$\mathbf{f}'(t) = -a \sin t \mathbf{e}_1 + b \cos t \mathbf{e}_2 \quad , \quad \mathbf{f}''(t) = -a \cos t \mathbf{e}_1 - b \sin t \mathbf{e}_2$$

olduğuna göre bunların vektörel çarpımları ve normu,

$$\mathbf{f}' \times \mathbf{f}'' = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -a \sin t & b \cos t & 0 \\ -a \cos t & -b \sin t & 0 \end{pmatrix} = ab \mathbf{e}_3 \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\| = ab$$

sonucunu verir. Birinci türevin normu:

$$\|\mathbf{f}'\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}$$

bulunacağından (3.23)'e göre eğrilik,

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\|}{\|\mathbf{f}'\|^3} = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}$$

ve eğrilik yarıçapı,

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}}{ab}$$

çıkar. Burada eğriliğin sabit olmadığı görülmektedir. Eğriliğin $t = \frac{\pi}{2}$ noktasındaki değerini bulalım.

$$\kappa = \frac{b}{a^2}$$

Örnek 3.11

Düzlemde, $\mathbf{f}(t) = t \mathbf{e}_1 + t^2 \mathbf{e}_2$ vektör fonksiyonu ile verilen parabolün eğriliğini ve eğrilik yarıçapını bulalım.

Parabole ilişkin vektör fonksiyonun birinci ve ikinci türevleri,

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{e}_1 + 2t \mathbf{e}_2 \quad , \quad \mathbf{f}''(t) = 2 \mathbf{e}_2$$

olduğuna göre bunların vektörel çarpımları ve normu,

$$\mathbf{f}' \times \mathbf{f}'' = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 2t & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\mathbf{e}_3 \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\| = 2$$

sonucunu verir. Öte yandan birinci türevin normu için,

$$\mathbf{f}' = \mathbf{e}_1 + 2t\mathbf{e}_2 \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{f}'\| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

bulunacağından (3.23)'e göre eğrilik,

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\|}{\|\mathbf{f}'\|^3} = \frac{2}{(1 + 4t^2)^{3/2}}$$

ve eğrilik yarıçapı,

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2}(1 + 4t^2)^{3/2}$$

çıkar.

Örnek 3.12

$\mathbf{f}(t) = a \cos t\mathbf{e}_1 + a \sin t\mathbf{e}_2 + bt\mathbf{e}_3$ vektör fonksiyonu ile tanımlı helisin eğriliğini bulalım.

Birinci ve ikinci türevler:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(t) &= -a \sin t\mathbf{e}_1 + a \cos t\mathbf{e}_2 + b\mathbf{e}_3 & \mathbf{f}''(t) &= -a \cos t\mathbf{e}_1 - a \sin t\mathbf{e}_2 \\ \|\mathbf{f}'(t)\| &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ \mathbf{f}' \times \mathbf{f}'' &= ab \sin t\mathbf{e}_1 - ab \cos t\mathbf{e}_2 + a^2\mathbf{e}_3 \\ \|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\| &= a\sqrt{a^2 + b^2} \end{aligned}$$

(3.23)'e göre eğrilik,

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\|}{\|\mathbf{f}'\|^3} = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

ve eğrilik yarıçapı,

$$\rho = \frac{1}{\kappa} = \frac{a^2 + b^2}{a}$$

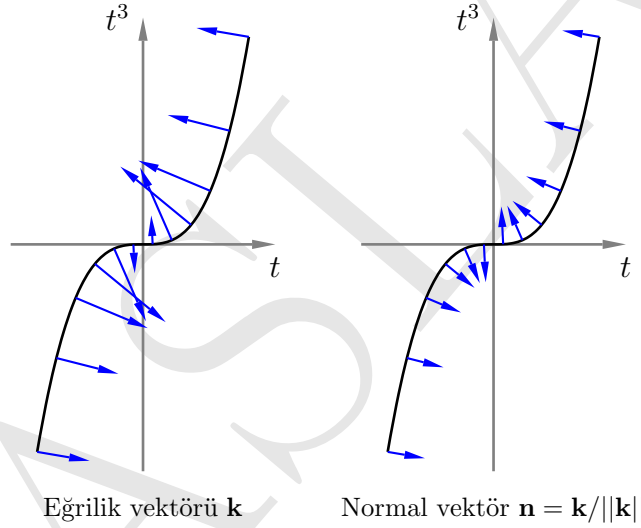
çıkar.

3.5 Asal Normal Birim Vektör ve Oskülatör Düzlemi

Normal vektör, bir yüzey veya eğriye dik yönündeki vektör olarak tanımlanır. Eğrilerin diferansiyel geometrisinde, eğrilik vektörü \mathbf{k} ile aynı yönü gösterir. Bu nedenle, zaman zaman eğrilik vektörüyle özdeş kabul edilir. $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ olmadığı sürece, eğrilik vektörü asal normal birim veya kısaca *normal vektör*,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|} = \frac{\dot{\mathbf{t}}}{\kappa} \quad (3.24)$$

haline getirilebilir. Daha önce söz edildiği gibi, eğrilik vektörü eğrinin konkav olduğu yöne baktığından, eğri boyunca ilerleyen bir cismin hangi tarafa yöneldiği normal vektörün yönü yardımıyla kolayca anlaşılabilir. Soldan sağa veya sağdan sola dönüşlerde normal vektör ters yönleri gösterir. Yönün değişmesine doğru, eğrilik vektörlerinin boyu giderek kısalmış ve öyle bir noktada κ eğrilik değeri sıfıra ulaşır. Bu noktada eğrilik ve normal vektör tanımlı olmaz (bkz. Şekil 3.9).



Şekil 3.9: $\mathbf{f}(t) = [t, t^3]$ uzay eğrisi boyunca eğrilik vektörü ve asal normal birim vektör

Uzay eğrisi üzerinde $\mathbf{f}(t_0) = [x_0, y_0, z_0]$ noktasından geçen normal vektöre paralel doğrunun vektörel denklemi,

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0 + k\mathbf{n} \quad (3.25)$$

eşitliği ile ifade edilir. Burada $k \in \mathbb{R}$ teğet doğrunun denkleminde olduğu gibi skaler bir sayıdır.

Normal ve teğet vektörlerin oluşturmuş olduğu düzleme *oskületör (dokunum) düzlemi* denir. Uzak eğrisi üzerinde bir t_0 noktası ile birlikte buna sonsuz anlamda yakın iki komşu noktadan geçen düzlemin limit durumunu ifade eder. Oskületör düzlemi, \mathbf{t} ve \mathbf{n} vektörlerinden geçtiğine göre, bunların vektörel çarpımları ile oluşan vektöre dik olmalıdır. İki vektör ve bunların vektörel çarpımıyla elde edilen üçüncü vektör doğrusal bağımlı olacağından, karışık üçlü çarpımları sıfıra eşittir. Bu durumda, $\mathbf{f}(t_0)$ noktasında oskületör düzleminin denklemi, (2.21)'den

$$(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \cdot (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = [(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0)\mathbf{t}\mathbf{n}] = \det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x'_0 & y'_0 & z'_0 \\ x''_0 & y''_0 & z''_0 \end{pmatrix} = 0 \quad (3.26)$$

söz konusu üç vektörün üçlü skaler çarpımı şeklinde yazılabilir. \mathbf{f} oskületör düzlemi üzerinde herhangi bir noktanın konumunu (x, y, z) gösterir.

Örnek 3.13

Örnek 3.7 deki eğrinin $t = 1$ de oskületör düzlemi denklemini bulalım.

$\mathbf{f}(t) = 3t^3\mathbf{e}_1 + 2t^2\mathbf{e}_2 + t\mathbf{e}_3$ vektör fonksiyonunun skaler bileşenleri ve türevleri:

$$\begin{array}{lll} x(t) = 3t^3 & y(t) = 2t^2 & z(t) = t \\ x'(t) = 9t^2 & y'(t) = 4t & z'(t) = 1 \\ x''(t) = 18t & y''(t) = 4 & z''(t) = 0 \end{array}$$

$\mathbf{f}(t)$ 'nin bileşenleri ve türevlerinin $t = 1$ 'deki değerleri,

$$\begin{array}{lll} x(1) = 3 & y(1) = 2 & z(1) = 1 \\ x'(1) = 9 & y'(1) = 4 & z'(1) = 1 \\ x''(1) = 18 & y''(1) = 4 & z''(1) = 0 \end{array}$$

Oskületör düzlemi denklemi:

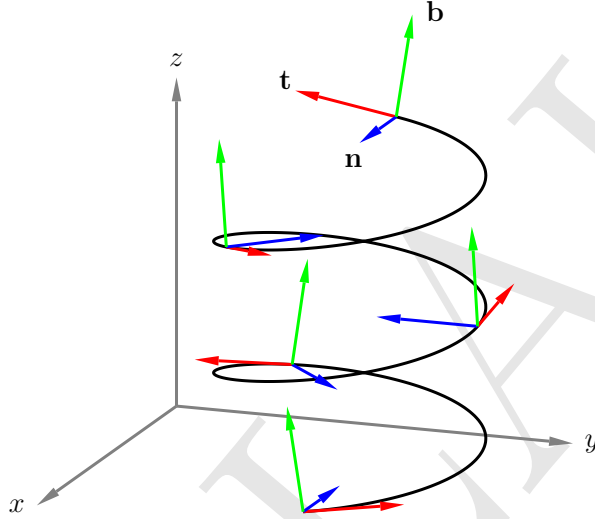
$$\det \begin{pmatrix} x - 3 & y - 2 & z - 1 \\ 9 & 4 & 1 \\ 18 & 4 & 0 \end{pmatrix} = -4x + 18y - 36z + 84 = 0$$

Ya da

$$-2x + 9y - 18z + 42 = 0$$

3.6 Hareketli Üçlü Vektör Sistemi

Üç boyutlu Öklit uzayında sürekli, diferansiyellenebilir bir eğri (sınıf ≥ 2) boyunca ilerleyen bir cismin yerel davranışları, başlangıcı eğri üzerinde bulunan hareketli bir üçlü vektör sistemiyle incelenebilir. Yerel koordinat sistemi eğrinin eğrilik, dönme, burulma vb. özelliklerini global koordinat sistemine (x, y, z) göre çok daha kolay açıklar. Cismin hareketine bağlı olarak başlangıcı sürekli hareket eden bu sistemin eksen yönelimleri de noktadan noktaya değişir (Şekil 3.10).



Şekil 3.10: Hareketli üçlü vektör sistemi

Belirli bir noktada, cismin hareket doğrultusunu gösteren \mathbf{t} teğet birim vektör Bölüm 3.3'de, cismin hangi yöne döndüğünü gösteren \mathbf{n} asal normal birim vektör Bölüm 3.5'de açıklanmıştı. \mathbf{t} ve \mathbf{n} yukarıda söz edilen hareketli üçlü vektör sisteminin iki bileşenine karşılık gelir. Üçüncü vektör, bunların vektörel çarpımlarına,

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} \quad (3.27)$$

eşittir. \mathbf{t} ve \mathbf{n} ile birlikte eğri üzerinde bir sağ el koordinat sisteminin oluşmasını sağlayan \mathbf{b} 'ye *binormal birim vektör* adı verilir. \mathbf{t} , \mathbf{n} ve \mathbf{b} Frenet üçlüsü olarak da bilinen hareketli ortonormal,

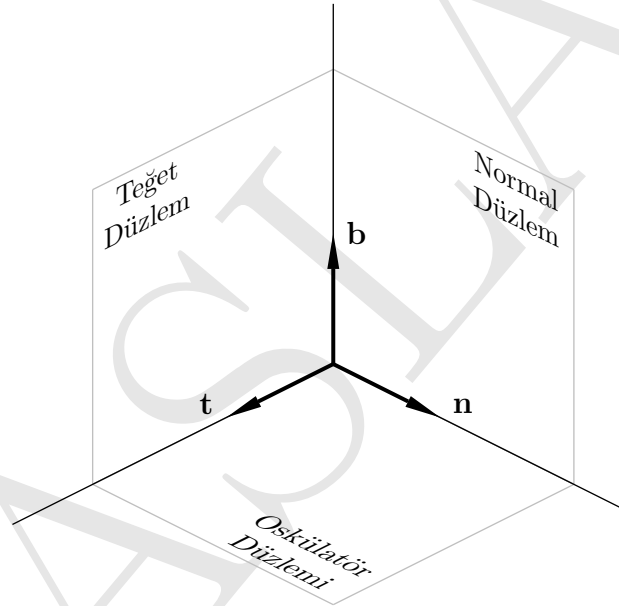
$$\begin{aligned} \mathbf{t} \cdot \mathbf{t} &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1 \\ \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

vektör sistemini meydana getirir. Eğriliğin olmadığı ($\mathbf{k} = \mathbf{0}$) noktada Frenet üçlüsü tanımlı değildir.

Çizelge 3.1: Frenet vektörlerinin oluşturduğu düzlemler ve denklemleri

Adı	Vektör çifti	Vektörel denklemi
Oskülatör düzlemi	\mathbf{t} ve \mathbf{n}	$(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \cdot \mathbf{b} = 0$
Teğet düzlem	\mathbf{t} ve \mathbf{b}	$(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$
Normal düzlem	\mathbf{n} ve \mathbf{b}	$(\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \cdot \mathbf{t} = 0$

Uzay eğrisi üzerindeki konumu s ile gösterilen bir noktadaki Frenet üçlüsünün eksenleri karşıt yön için $(-s)$ farklı bir görünüm alır. Cismin hareketi aksi yönden gerçekleşeceği için \mathbf{t} 'nin aynı noktadaki yönü de ters olur. Buna karşın normal vektör \mathbf{n} 'nin yönü değişmez. Ancak, teğet vektöre bağlı olarak binormal vektör \mathbf{b} de aksi yöne bakar.



Şekil 3.11: Frenet üçlüsü ile tanımlı doğrular ve düzlemler

Frenet vektör çiftleri Frenet üçyüzlüsü adı verilen düzlemleri belirler. Şekil 3.11'da görülen teğet, normal ve binormal doğrular bu düzlemlerin arakesitidir. Çizelge 3.1 her bir düzlemi belirleyen vektör çiftini ve onun düzlem denklemini (vektörel) vermektedir.

Ayrıca,

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \dot{\mathbf{f}} \\ \mathbf{n} &= \ddot{\mathbf{f}} / \|\ddot{\mathbf{f}}\| \\ \mathbf{b} &= \mathbf{t} \times \mathbf{n}\end{aligned}\quad (3.29)$$

yazılabilir.

Örnek 3.14

$\mathbf{f}(t) = a \cos t \mathbf{e}_1 + a \sin t \mathbf{e}_2 + b \mathbf{e}_3$ ($a > 0$ ve $b \neq 0$) helis eğrisinin Frenet vektör üçlüsünü oluşturalım.

Teğet birim vektör,

$$\mathbf{t} = (a^2 + b^2)^{-1/2}(-a \sin t \mathbf{e}_1 + a \cos t \mathbf{e}_2 + b \mathbf{e}_3)$$

örnek 3.6'de bulunmuştu. \mathbf{k} eğrilik vektörü,

$$\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} / \left\| \frac{d\mathbf{t}}{dt} \right\| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}(-a \cos t \mathbf{e}_1 - a \sin t \mathbf{e}_2) \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = -\frac{a}{a^2 + b^2}(\cos t \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2)$$

ve buradan birim normal vektör,

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{\|\mathbf{k}\|} = -(\cos t \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2)$$

çıkar. Binormal vektör \mathbf{t} ve \mathbf{n} 'nin vektörel çarpımına eşittir:

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{-a \sin t}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{a \cos t}{\sqrt{a^2 + b^2}} & \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{pmatrix} = (a^2 + b^2)^{-1/2}(b \sin t \mathbf{e}_1 - b \cos t \mathbf{e}_2 + a \mathbf{e}_3)$$

3.7 Burulma ve Frenet-Serret Denklemleri

Burulma, yay uzunluğuna göre \mathbf{b} birim vektörün (binormal) dönme hızının bir ölçüsüdür:

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n} \quad (3.30)$$

Binormalin dönüş hızına, eğrinin belirli bir noktadaki burulması veya torsiyonu denir ve τ ile gösterilir. Burulma, oskülatör düzleminin dönüş hızını, veya başka bir

deyişle, eğrinin oskulator düzleminden uzaklaşmasını ifade ettiğinden zaman zaman 2. eğrilik olarak da adlandırılır.

(3.30)'nin nasıl elde edildiği, Frenet üçlüsünün (3.28) ile verilen ortonormal özellikleri yardımıyla açıklanabilir. Daha önce söylendiği gibi, herhangi bir birim vektörün türevi kendisine diktir. Bu nedenle, $\dot{\mathbf{b}}$ binormal birim vektöre dik olacaktır. Öte yandan, $\mathbf{t} \cdot \mathbf{b} = 0$ eşitliğinin türevi oluşturulursa,

$$\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{b}} = 0 \quad (3.31)$$

ve buradan da,

$$\mathbf{t} \cdot \dot{\mathbf{b}} = -\dot{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{b} = -\kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (3.32)$$

sonucu çıkar. (3.32)'dan anlaşılmaktadır ki, $\dot{\mathbf{b}}$ aynı zamanda teğet vektöre de diktir. Bu durumda, hem \mathbf{b} hem de \mathbf{t} 'ye dik olan $\dot{\mathbf{b}}$, normal vektöre (\mathbf{n}) paralel olmalıdır. Sonuç olarak, binormal vektörün türevi (3.30)'ye göre normal birim vektörden belirli bir katsayı ($-\tau$) kadar farklıdır. Burada, eksi işareti $\dot{\mathbf{b}}$ ve \mathbf{n} 'nin ters yönlü vektörler olduğunu işaret etmektedir. Burulmayı hesaplamak için (3.30)'de eşitliğin her iki yanını \mathbf{n} ile skaler olarak çarpımak yeterlidir:

$$\tau = \tau(s) = -\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n} \quad (3.33)$$

Uzay eğrisinin doğal parametrenin fonksiyonu olarak verilmesi durumunda burulma, $\mathbf{f} = \mathbf{f}(s)$ vektör fonksiyonunun türevleri cinsinden elde edilebilir. Sırasıyla birinci, ikinci ve üçüncü türev,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{f}} &= \mathbf{t} \\ \ddot{\mathbf{f}} &= \kappa \mathbf{n} \\ \dddot{\mathbf{f}} &= \frac{d}{ds}(\kappa(s)\mathbf{n}) = \kappa' \mathbf{n} + \kappa(-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (3.34)$$

eşitliklerinden üçlü skaler çarpım düzenlenirse,

$$\begin{aligned} [\dot{\mathbf{f}} \ddot{\mathbf{f}} \ddot{\mathbf{f}}] &= \kappa^2 \tau [\mathbf{t} \mathbf{n} \mathbf{b}] \\ &= \kappa^2 \tau \end{aligned} \quad (3.35)$$

sonucu çıkar. (3.35)'de τ çekilir ve κ^2 için (3.21) eşitliği göz önüne alınırsa,

$$\tau = \frac{[\dot{\mathbf{f}} \ddot{\mathbf{f}} \ddot{\mathbf{f}}]}{\kappa^2} = \frac{[\dot{\mathbf{f}} \ddot{\mathbf{f}} \ddot{\mathbf{f}}]}{\|\mathbf{k}\|^2} = \frac{[\dot{\mathbf{f}} \ddot{\mathbf{f}} \ddot{\mathbf{f}}]}{\|\dot{\mathbf{f}}\|^2} \quad (3.36)$$

bulunur. \mathbf{f} vektör fonksiyonu, herhangi bir t parametresine bağlı olarak ifade ediliyorsa, benzer bir yol izlenerek aynı sonuca,

$$\tau = \frac{[\mathbf{f}' \mathbf{f}'' \mathbf{f}''']}{\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\|^2} \quad (3.37)$$

eşitliğiyle de ulaşılabilir. Her iki eşitlik burulmanın hesaplanacağı noktada $\kappa \neq 0$ olmak koşuluyla geçerlidir.

Burulmanın tersi, $\sigma = 1/\tau$ burulma yarıçapı olarak adlandırılır. Burulma yarıçapı türetilmiş bir kavramdır; eğrilik çemberi veya yarıçapı gibi geometrik bir yorumu yoktur.

Teorem 3.2 Eğri boyunca $\tau = 0$ sonucu çıkıyor ise uzay eğrisi bir düzlem eğridir.

Örnek 3.15

$\mathbf{f}(t) = a \cos t \mathbf{e}_1 + a \sin t \mathbf{e}_2 + b t \mathbf{e}_3$ helisinin burulmasını hesaplayalım.

Örnek 3.14'de elde edilen

$$\mathbf{b} = (a^2 + b^2)^{-1/2} (b \sin t \mathbf{e}_1 - b \cos t \mathbf{e}_2 + a \mathbf{e}_3)$$

binormal vektörün türevi, $\|\frac{d\mathbf{f}}{dt}\| = (a^2 + b^2)^{1/2}$ olmak üzere,

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{dt} / \left\| \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right\| = \frac{b}{a^2 + b^2} (\cos t \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2)$$

çıkar. Söz konusu örnekte normal vektör,

$$\mathbf{n} = -(\cos t \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2)$$

olarak bulunduğuna göre, (3.33)'dan burulma için,

$$\tau = -\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{n} = -\frac{b}{a^2 + b^2} (\cos t \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2) \cdot -(\cos t \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2) = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

sonucu elde edilir.

Helisin burulması ikinci bir yoldan da bulunabilir.

$$\mathbf{f}'(t) = -a \sin t \mathbf{e}_1 + a \cos t \mathbf{e}_2 + b \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{f}''(t) = -a \cos t \mathbf{e}_1 - a \sin t \mathbf{e}_2$$

$$\|\mathbf{f}'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\mathbf{f}' \times \mathbf{f}'' = ab \sin t \mathbf{e}_1 - ab \cos t \mathbf{e}_2 + a^2 \mathbf{e}_3$$

$$\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\| = a \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\mathbf{f}'''(t) = a \sin t \mathbf{e}_1 - a \cos t \mathbf{e}_2$$

$$[\mathbf{f}' \mathbf{f}'' \mathbf{f}'''] = \begin{pmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & 0 \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{pmatrix} = a^2 b$$

(3.37) eşitliğinden,

$$\tau = \frac{[\mathbf{f}' \mathbf{f}'' \mathbf{f}''']}{\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\|^2} = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

elde edilir.

\mathbf{t} , \mathbf{n} ve \mathbf{b} üç boyutlu vektör uzayında ortonormal baz vektörleri oluşturduğundan, bunların türevleri kendilerinin doğrusal kombinasyonları,

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{d\mathbf{t}}{ds} = \kappa \mathbf{n} \quad (3.38a)$$

$$\dot{\mathbf{n}} = \frac{d\mathbf{n}}{ds} = \tau \mathbf{b} - \kappa \mathbf{t} \quad (3.38b)$$

$$\dot{\mathbf{b}} = \frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\tau \mathbf{n} \quad (3.38c)$$

veya

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{t}} \\ \dot{\mathbf{n}} \\ \dot{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

matris biçiminde gösterilebilir. Bu eşitliklere Frenet-Serret denklemleri denir. (3.38a ve c) eşitlikleri, zaten daha önce sırasıyla (3.24) ve (3.30) eşitlikleriyle bulunmuştu. (3.38b) Frenet vektörlerinin ortonormal özellikleri kullanılarak belirlenebilir (bkz. Goetz, 1970, s. 55). Frenet-Serret denklemleri, yerel davranışları (kinematiği) eğrilik ve burulma ile açıklanan hareketli bir cismin, uzayda nasıl bir yol izleyeceğinin tek anlamlı olarak tanımlanabileceğini gösterir. Bu nedenle, $\kappa = \kappa(s)$ ve $\tau = \tau(s)$ sürekli fonksiyonlarına eğrinin *doğal* veya *gerçek denklemleri* denir.

3.8 Yerel Koordinat Sistemine Göre Eğrinin Bağlı Konumu

Burulma ve eğrilığe geometrik bir bakış açısı, başlangıç noktası s_0 'a eğri üzerinde $\Delta s = s - s_0$ kadar uzak ikinci bir nokta için vektör fonksiyonun Taylor açılımı yardımıyla,

$$\mathbf{f}(s) = \mathbf{f}(s_0) + \dot{\mathbf{f}}(s_0)\Delta s + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{f}}(s_0)\Delta s^2 + \frac{1}{6}\ddot{\ddot{\mathbf{f}}}(s_0)\Delta s^3 + \dots \quad (3.40)$$

getirilebilir. s 'nin burada doğal parametre olduğunu göz önüne alırsak s_0 'da vektör fonksiyonun türevleri,

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{f}}(s_0) &= \mathbf{t}_0 \\ \ddot{\mathbf{f}}(s_0) &= \frac{d\mathbf{t}_0}{ds} = \kappa_0 \mathbf{n}_0 \\ \dddot{\mathbf{f}}(s_0) &= \frac{d}{ds}(\kappa_0 \mathbf{n}_0) = \dot{\kappa}_0 \mathbf{n}_0 + \kappa_0 \dot{\mathbf{n}}_0 = -\kappa_0^2 \mathbf{t}_0 + \dot{\kappa}_0 \mathbf{n}_0 + \kappa_0 \tau_0 \mathbf{b}_0\end{aligned}\quad (3.41)$$

(3.40)'de yerlerine konular,

$$\mathbf{f}(s) = \mathbf{f}(s_0) + \mathbf{t}_0 \Delta s + \frac{1}{2} \kappa_0 \mathbf{n}_0 \Delta s^2 + \frac{1}{6} (-\kappa_0^2 \mathbf{t}_0 + \dot{\kappa}_0 \mathbf{n}_0 + \kappa_0 \tau_0 \mathbf{b}_0) \Delta s^3 + \dots \quad (3.42)$$

ve $s_0 = 0$ alınır,

$$\mathbf{f}(s) = \left(s - \frac{1}{6} \kappa_0^2 s^3 \right) \mathbf{t}_0 + \left(\frac{1}{2} \kappa_0 s^2 + \frac{1}{6} \dot{\kappa}_0 s^3 \right) \mathbf{n}_0 + \left(\frac{1}{6} \kappa_0 \tau_0 \right) \mathbf{b}_0 + \mathbf{o}(s^3) \quad (3.43)$$

eşitliği bulunur. Burada $\mathbf{f}(0) = \mathbf{0}$ olduğu varsayılmıştır. Son eşitlikte $\mathbf{o}(s^3)$, s^3 ve daha yüksek dereceli terimlerin göz ardı edildiği anlamındadır. Sonuç olarak \mathbf{t}_0 , \mathbf{n}_0 , \mathbf{b}_0 vektörleriyle oluşan yerel koordinat sistemine göre eğrinin (bağlı) koordinatları,

$$x(s) = s - \frac{1}{6} \kappa_0^2 s^3 + o(s^3) \quad (3.44a)$$

$$y(s) = \frac{1}{2} \kappa_0 s^2 + \frac{1}{6} \dot{\kappa}_0 s^3 + o(s^3) \quad (3.44b)$$

$$z(s) = \frac{1}{6} \kappa_0 \tau_0 s^3 + o(s^3) \quad (3.44c)$$

eşitlikleriyle hesaplanır.

Örnek 3.16

Helis için bağlı koordinatları belirleyelim.

Örnek 3.6, 3.12 ve 3.15'den helis doğal denklemi, eğriliği ve burulması:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(s) &= a \cos \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{e}_1 + a \sin \left(\frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \mathbf{e}_2 + b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \mathbf{e}_3 \\ \kappa_0 &= \frac{a}{a^2 + b^2} \\ \dot{\kappa}_0 &= 0 \\ \tau_0 &= \frac{b}{a^2 + b^2}\end{aligned}$$

Bağıl koordinatlar:

$$\begin{aligned}x(s) &= s - \frac{a^2}{6(a^2 + b^2)^2} s^3 \\y(s) &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) s^2 \\z(s) &= \frac{1}{6} \left(\frac{a}{a^2 + b^2} \right) \left(\frac{b}{a^2 + b^2} \right) s^3\end{aligned}$$

3.9 Alıştırmalar

Alıştırma 3.1 $\mathbf{r}(\theta) = \cos^3 \theta \mathbf{e}_1 + \sin^3 \theta \mathbf{e}_2$ vektör fonksiyonu ile çizilen eğrinin $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığındaki yay uzunluğunu hesaplayınız.

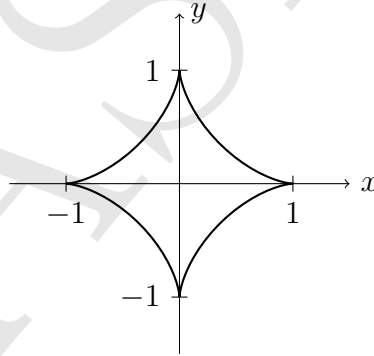
Çözüm:

$$\mathbf{r}'(\theta) = -3 \cos^2 \theta \sin \theta \mathbf{e}_1 + 3 \sin^2 \theta \cos \theta \mathbf{e}_2$$

$$\|\mathbf{r}'(\theta)\| = 3 \sin \theta \cos \theta \quad s(\theta) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin \theta \cos \theta d\theta$$

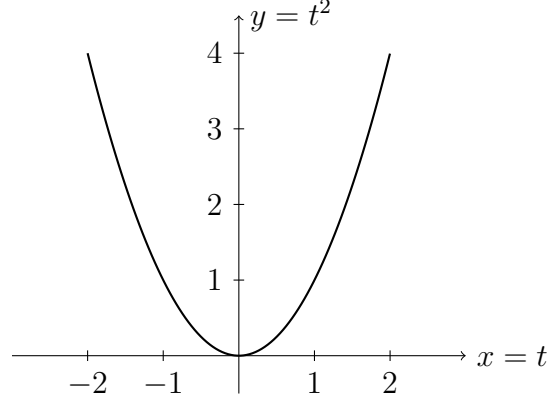
$$\sin \theta = t \quad dt = \cos \theta d\theta$$

$$s(\theta) = 3 \int t dt = 3 \frac{t^2}{2} = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}$$



Alıştırma 3.2 $\mathbf{f}(t) = t\mathbf{e}_1 + t^2\mathbf{e}_2$ vektör fonksiyonu ile verilen parabolün $[0,1]$ aralığındaki yay uzunluğunu bulunuz.

$$\mathbf{f}'(t) = \mathbf{e}_1 + 2t\mathbf{e}_2 \quad \|\mathbf{f}'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 1}$$



$$s(t) = \int_0^1 \sqrt{4t^2 + 1} dt = \left[\frac{t}{2} \sqrt{4t^2 + 1} + \frac{1}{4} \ln(\sqrt{4t^2 + 1} + 2t) \right]_0^1 = 1.478$$

Bu hesaplama nümerik olarak da yapılabilir. (3.2) eşitliğine göre:

$$\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1}) = (t_i - t_{i-1})\mathbf{e}_1 + (t_i^2 - t_{i-1}^2)\mathbf{e}_2$$

$$\|\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})\| = \|\Delta \mathbf{f}\| = \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (t_i^2 - t_{i-1}^2)^2}$$

$s = \sum \sqrt{(t_i - t_{i-1})^2 + (t_i^2 - t_{i-1}^2)^2}$ toplamı ile uzunluk bulunur. $\Delta t = t_i - t_{i-1} = 0.1$ olarak hesaplama yapalım.

t_i	$\ \Delta \mathbf{f}\ $
0.0	
0.1	0.100
0.2	0.104
0.3	0.112
0.4	0.122
0.5	0.135
0.6	0.149
0.7	0.164
0.8	0.180
0.9	0.197
1.0	0.215
Σ	1.478

Görüldüğü gibi eğri yay uzunluğu 10 parçaya bölünerek olması gereken sonuç 3 basamak doğrulukta tam olarak elde edilmiştir.

Alystırma 3.3 $\mathbf{f}(t) = 2 \cos t \mathbf{e}_1 + \sin t \mathbf{e}_2 + \frac{t}{3} \mathbf{e}_3$ ile verilen helisin $[0, \frac{\pi}{2}]$ aralığındaki yay

uzunluğunu nümerik olarak bulunuz.

$$\mathbf{f}'(t) = -2 \sin t \mathbf{e}_1 + \cos t \mathbf{e}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{e}_3 \quad \|\mathbf{f}'(t)\| = \sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{9}}$$

Helis tabanı elips olan silindire sarılmaktadır. Bu nedenle $s(t) = \int_0^t \sqrt{4 \sin^2 t + \cos^2 t + \frac{1}{9}} dt$ eliptik integraldir. Elemanter çözümü yoktur. Nümerik çözüm yapılabilir.

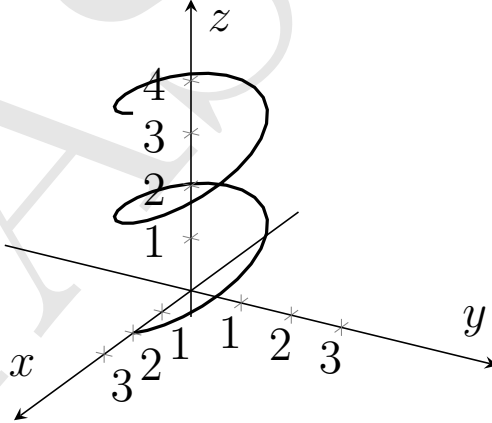
$$\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1}) = 2(\cos t_i - \cos t_{i-1}) \mathbf{e}_1 + (\sin t_i - \sin t_{i-1}) \mathbf{e}_2 + \frac{t_i - t_{i-1}}{3} \mathbf{e}_3$$

$$\|\Delta \mathbf{f}\| = \|\mathbf{f}(t_i) - \mathbf{f}(t_{i-1})\| = \sqrt{4(\cos t_i - \cos t_{i-1})^2 + (\sin t_i - \sin t_{i-1})^2 + \frac{(t_i - t_{i-1})^2}{9}}$$

$s = \sum \|\Delta \mathbf{f}\|$ toplamı ile uzunluk bulunur. $\Delta t = t_i - t_{i-1} = \frac{\pi}{20}$ olarak hesaplama yapalım.

t_i	$\ \Delta \mathbf{f}\ $
0.000	
0.157	0.167
0.314	0.177
0.471	0.195
0.628	0.218
0.785	0.242
0.942	0.265
1.100	0.285
1.257	0.301
1.414	0.312
1.571	0.317
Σ	2.479

Burada incelenen helisin üç boyutlu grafiği aşağıdaki gibidir.



Alıştırma 3.4 $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ vektör fonksiyonunun Frenet vektör üçlüsünü

oluşturunuz.

Sonuç:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t \mathbf{e}_1 + \cos t \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

$$\mathbf{n} = -\cos t \mathbf{e}_1 - \sin t \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin t \mathbf{e}_1 - \cos t \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

Alıştırma 3.5 $\mathbf{r}(t) = (\cos(\ln t), \sqrt{t}, \sin(\ln t))$ hareketli bir cismin konum vektörü olsun. Söz konusu vektörün,

- $\mathbf{v}(t)$ hız ve
- $\mathbf{a}(t)$ ivme vektörlerini

belirleyiniz.

Çözüm:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \left(\frac{-\sin(\ln t)}{t}, \frac{1}{2\sqrt{t}}, \frac{\cos(\ln t)}{t} \right)$$

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \left(\frac{-\cos(\ln t) + \sin(\ln t)}{t^2}, \frac{-t^{-\frac{3}{2}}}{4}, \frac{-\sin(\ln t) - \cos(\ln t)}{t^2} \right)$$

Alıştırma 3.6 $\mathbf{f}(t) = 2t\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}t^{3/2}\mathbf{e}_2$ vektör fonksiyonu ile çizilen eğrinin,

- düzenli olduğunu gösteriniz.
- $[5, 12]$ aralığındaki uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:

$\mathbf{f}'(t) = 2\mathbf{e}_1 + t^{1/2}\mathbf{e}_2 \neq \mathbf{0}$ olduğundan eğri düzenlidir.

Eğri uzunluğu:

$$s(t) = \int_5^{12} \|\mathbf{f}'(t)\| dt = \int_5^{12} \sqrt{4+t} dt = \frac{2}{3}(4+t)^{\frac{3}{2}} \Big|_5^{12} = \frac{74}{3}$$

Alıştırma 3.7 $\mathbf{r}(\theta) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right]$ vektör fonksiyonunu doğal parametre (yay uzunluğu) cinsinden tanımlayınız.

Çözüm:

$$\mathbf{r}'(\theta) = \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta, -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta, -\frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta \right]$$

$$s(\theta) = \int \|\mathbf{r}'\| = \int d\theta = \theta$$

$\theta = s$ alınarak;

$$\mathbf{r}(s) = \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \cos s + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos s, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos s - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin s \right]$$

Alıştırma 3.8 $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ vektör fonksiyonu için $t = \frac{\pi}{4}$ noktasındaki birim teğet vektörü ve bu noktadan geçen teğet doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$\text{Birim teğet vektör: } \mathbf{t}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1)$$

$$\mathbf{t}(t_0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Teğet doğru denklemi:

$$\mathbf{r}(t_0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{x-x_0}{x'_0} = \frac{y-y_0}{y'_0} = \frac{z-z_0}{z'_0}$$

$$-2x + \sqrt{2} = 2y - \sqrt{2} = \sqrt{2}z - \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

Alıştırma 3.9 $0 \leq t \leq \pi$ aralığında $\mathbf{x} = e^t \cos t \mathbf{e}_1 + e^t \sin t \mathbf{e}_2 + e^t \mathbf{e}_3$ vektör fonksiyonu ile çizilen eğrinin uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:

$$\mathbf{x}' = (e^t \cos t - e^t \sin t) \mathbf{e}_1 + (e^t \sin t + e^t \cos t) \mathbf{e}_2 + e^t \mathbf{e}_3$$

$$\|\mathbf{x}'\| = \sqrt{3}e^t$$

$$s(t) = \sqrt{3} \int_0^\pi e^t dt = \sqrt{3}e^t \Big|_0^\pi = \sqrt{3}(e^\pi - 1)$$

Alıştırma 3.10 $\mathbf{r}(t) = (t - \sin t) \mathbf{e}_1 + (1 - \cos t) \mathbf{e}_2 + t \mathbf{e}_3$ vektör fonksiyonun eğriliğini ve burulmasını bulunuz.

Sonuç:

$$\kappa = \frac{\sqrt{2 - 2 \cos t + \cos^2 t}}{(3 - 2 \cos t)^{3/2}}$$

$$\tau = \frac{-1}{2 - 2 \cos t + \cos^2 t}$$

Alıştırma 3.11 $\mathbf{r}(t) = 3t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} - 4t^2 \mathbf{k}$ vektör fonksiyonu ile verilen eğrinin eğriliğini ve burulmasını hesaplayınız.

Sonuç:

$$\kappa = \frac{6\sqrt{17}}{(9 + 68t^2)^{3/2}}$$

$$\tau = 0$$

Burulmanın sıfır olması, eğrinin düzlem eğri olduğunu göstermektedir.

Alıştırma 3.12 $\mathbf{x}(t) = (t \sin t, t \cos t, \frac{\sqrt{8}}{3} t^{3/2})$ vektör fonksiyonu ile tanımlı bir uzay eğrisinin $t = 0$ ve $t = 1$ aralığındaki yay parçası uzunluğunu hesaplayınız.

Sonuç: $\frac{3}{2}$

Alıştırma 3.13 $\mathbf{y}(t) = (\sin t, t, -\cos t)$ vektör fonksiyonu ile tanımlı bir cismin hızının eğri boyunca değişmediğini gösteriniz ve aynı eğriyi doğal parametre cinsinden tanımlayınız.

Çözüm:

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{y}'(t) = (\cos t, 1, \sin t) \quad \|\mathbf{v}(t)\| = \sqrt{2}$$

Hızın büyüklüğü t den bağımsız olduğundan hız sabittir.

$$s(t) = \int_0^t \|\mathbf{y}'(t)\| dt = \sqrt{2}t \quad t = \frac{s}{\sqrt{2}} \text{ yerine konulursa;}$$

$$\mathbf{y}(s) = (\sin \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}, -\cos \frac{s}{\sqrt{2}})$$

Alıştırma 3.14 $\mathbf{r}(t) = (3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3)$ vektör fonksiyonunun,

- Frenet vektör sistemini oluşturunuz,
- eğrilik değerini belirleyiniz.

Çözüm: Teğet vektörü,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) \\ &= 3(1 - t^2, 2t, 1 + t^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}'(t)\| &= 3\sqrt{1 - 2t^2 + t^4 + 4t^2 + 1 + 2t^2 + t^4} \\ &= 3\sqrt{2(1 + 2t^2 + t^4)} \\ &= 3\sqrt{2}(1 + t^2) \end{aligned}$$

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \frac{2t}{1 + t^2}, 1 \right)$$

çıkar. Buradan eğrilik vektörü,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{t}}{dt} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{-2t(1+t^2) - 2t(1-t^2)}{(1+t^2)^2}, \frac{2(1+t^2) - 4t^2}{(1+t^2)^2}, 0 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}(1+t^2)^2} (-4t, 2(1-t^2), 0) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{(1+t^2)^2} (-2t, 1-t^2, 0)\end{aligned}$$

$$\mathbf{k} = \frac{d\mathbf{t}}{dt} / \left\| \frac{d\mathbf{r}(\mathbf{t})}{dt} \right\| = \frac{1}{3(1+t^2)^3} (-2t, 1-t^2, 0)$$

Frenet vektör sistemi $(\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b})$ için, öncelikle normal birim vektörü oluşturalım:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{\kappa} = \frac{1}{1+t^2} (-2t, 1-t^2, 0)$$

Binormal vektör,

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$$

$$\begin{aligned}&= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{1-t^2}{\sqrt{2}(1+t^2)} & \frac{2t}{\sqrt{2}(1+t^2)} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-2t}{1+t^2} & \frac{1-t^2}{1+t^2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{t^2-1}{\sqrt{2}(1+t^2)} \right) \mathbf{e}_1 - \left(\frac{2t}{\sqrt{2}(1+t^2)} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{(1-t^2)^2 + 4t^2}{\sqrt{2}(1+t^2)^2} \right) \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{-2t}{1+t^2}, 1 \right)\end{aligned}$$

bulunur.

Frenet üçlü vektör sistemi:

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}, 1 \right) \\ \mathbf{n} &= \frac{1}{1+t^2} (-2t, 1-t^2, 0) \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{-2t}{1+t^2}, 1 \right)\end{aligned}$$

Eğrilik değeri için yukarıda belirlenen eğrilik vektörü yardımıyla,

$$\begin{aligned}\kappa = \|\mathbf{k}\| &= \frac{1}{3(1+t^2)^3} \sqrt{4t^2 + 1 - 2t^2 + t^4} \\ &= \frac{1}{3(1+t^2)^3} (1+t^2) = \frac{1}{3(1+t^2)^2}\end{aligned}$$

veya,

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3}$$

eşitliğinde,

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= (3 - 3t^2, 6t, 3 + 3t^2) & \Rightarrow & \|\mathbf{r}'\| = 3\sqrt{2}(1 + t^2) \\ \mathbf{r}'' &= (-6t, 6, 6t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 3 - 3t^2 & 6t & 3 + 3t^2 \\ -6t & 6 & 6t \end{pmatrix} \\ &= 18[(t^2 - 1)\mathbf{e}_1 - 2t\mathbf{e}_2 + (1 + t^2)\mathbf{e}_3] & \Rightarrow & \|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\| = 18\sqrt{2}(1 + t^2) \end{aligned}$$

elde edilir ve yerlerine yazılırsa,

$$\kappa = \frac{18\sqrt{2}(1 + t^2)}{54\sqrt{2}(1 + t^2)^3} = \frac{1}{3(1 + t^2)^2}$$

çıkar.

Alystırma 3.15 $\mathbf{f}(t) = a \cos t \mathbf{e}_1 + b \sin t \mathbf{e}_2 + c \mathbf{e}_3$ vektör fonksiyonu ile tanımlı eğrinin (tabanı elips olan silindire sarılan Helis) eğriliğini ve burulmasını bulunuz.

Çözüm: Vektör fonksiyonun türevleri:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(t) &= -a \sin t \mathbf{e}_1 + b \cos t \mathbf{e}_2 + c \mathbf{e}_3 \\ \|\mathbf{f}'(t)\| &= \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2} \\ \mathbf{f}''(t) &= -a \cos t \mathbf{e}_1 - b \sin t \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}'''(t) &= a \sin t \mathbf{e}_1 - b \cos t \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}' \times \mathbf{f}'' &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -a \sin t & b \cos t & c \\ -a \cos t & -b \sin t & 0 \end{pmatrix} = bc \sin t \mathbf{e}_1 - ac \cos t \mathbf{e}_2 + abc \mathbf{e}_3 \\ \|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\| &= \sqrt{b^2 c^2 \sin^2 t + a^2 c^2 \cos^2 t + a^2 b^2} \end{aligned}$$

Eğrilik:

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\|}{\|\mathbf{f}'\|^3} = \frac{\sqrt{b^2 c^2 \sin^2 t + a^2 c^2 \cos^2 t + a^2 b^2}}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t + c^2)^{3/2}}$$

$$[\mathbf{f}' \mathbf{f}'' \mathbf{f}'''] = \det \begin{pmatrix} -a \sin t & b \cos t & c \\ -a \cos t & -b \sin t & 0 \\ a \sin t & -b \cos t & 0 \end{pmatrix} = abc$$

Burulma:

$$\tau = \frac{[\mathbf{f}'\mathbf{f}''\mathbf{f}''']}{\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\|^2} = \frac{abc}{b^2c^2 \sin^2 t + a^2c^2 \cos^2 t + a^2b^2}$$

Alıştırma 3.16 $\mathbf{f}(t) = e^t \cos t \mathbf{e}_1 + e^t \sin t \mathbf{e}_2$ vektör fonksiyonu ile tanımlı logaritmik spiralin eğriliğini bulunuz.

Çözüm: Vektör fonksiyonun türevleri:

$$\begin{aligned}\mathbf{f}'(t) &= e^t(\cos t - \sin t)\mathbf{e}_1 + e^t(\cos t + \sin t)\mathbf{e}_2 \\ \|\mathbf{f}'(t)\| &= \sqrt{2}e^t \\ \mathbf{f}''(t) &= -2e^t \sin t \mathbf{e}_1 + 2e^t \cos t \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{f}' \times \mathbf{f}'' &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ e^t(\cos t - \sin t) & e^t(\cos t + \sin t) & 0 \\ -2e^t \sin t & 2e^t \cos t & 0 \end{pmatrix} = 2e^{2t}\mathbf{e}_3 \\ \|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\| &= 2e^{2t}\end{aligned}$$

Eğrilik:

$$\kappa = \frac{\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\|}{\|\mathbf{f}'\|^3} = \frac{1}{\sqrt{2}e^t}$$

Alıştırma 3.17 Nefroit eğrisinin $[0, t]$ aralığında yay uzunluğunu ve eğriliğini bulunuz. Parametrik gösterim: $\mathbf{f}(t) = a(3 \cos t - \cos 3t)\mathbf{e}_1 + a(3 \sin t - \sin 3t)\mathbf{e}_2$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}'(t) &= (a(-3 \sin t + 3 \sin 3t), a(3 \cos t - 3 \cos 3t)) \\ &= 3a(\sin 3t - \sin t, -(\cos 3t - \cos t)) \\ &= 6a(\cos 2t \sin t, \sin 2t \sin t) \\ \|\mathbf{f}'\| &= 6a \sin t \\ s(t) &= 6a \int_0^t \sin t dt = -6a \cos t \Big|_0^t \\ &= 6a(1 - \cos t)\end{aligned}$$

Dikkat!

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \quad \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

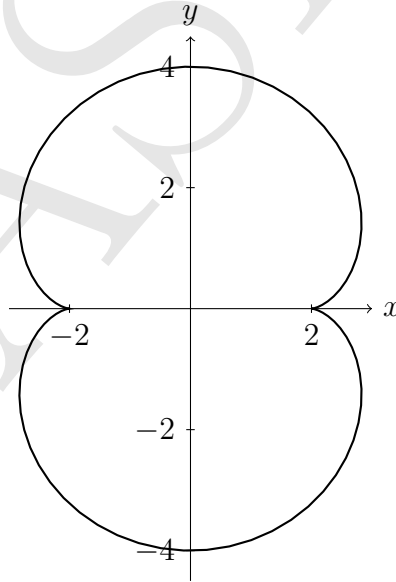
Eğriliği birim teğet vektör ve eğrilik vektörü ile hesaplayalım.

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \frac{\mathbf{f}'(t)}{\|\mathbf{f}'(t)\|} \\ &= (\cos 2t, \sin 2t) \\ \frac{d\mathbf{t}}{dt} &= (-2 \sin 2t, 2 \cos 2t) \\ \mathbf{k} &= \frac{\frac{d\mathbf{t}}{dt}}{\|\mathbf{f}'(t)\|} = \left(\frac{-\sin 2t}{3a \sin t}, \frac{\cos 2t}{3a \sin t} \right) \\ \kappa &= \|\mathbf{k}\| = \frac{1}{3a \sin t} \end{aligned}$$

Asal birim normal de bulunabilir.

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{\kappa} = (-\sin 2t, \cos 2t)$$

Nefroit grafiği $a = 1$ alınarak ağağıda gösterilmiştir.



Alıştırma 3.18 $\mathbf{f}(t) = t \cos t \mathbf{e}_1 + t \sin t \mathbf{e}_2$ ile tanımlı Arşimet spiralinin eğriliğini bulunuz.

$$\mathbf{f}'(t) = (\cos t - t \sin t) \mathbf{e}_1 + (\sin t + t \cos t) \mathbf{e}_2$$

$$\|\mathbf{f}'(t)\| = \sqrt{t^2 + 1}$$

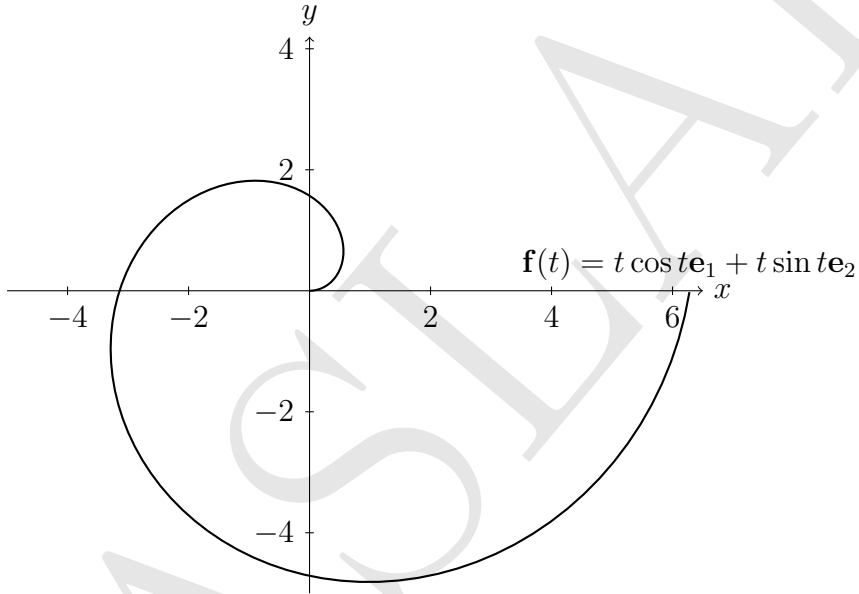
$$\mathbf{f}''(t) = (-2 \sin t - t \cos t) \mathbf{e}_1 + (2 \cos t - t \sin t) \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{f}' \times \mathbf{f}'' = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \cos t - t \sin t & \sin t + t \cos t & 0 \\ -2 \sin t - t \cos t & 2 \cos t - t \sin t & 0 \end{pmatrix} = (t^2 + 2) \mathbf{e}_3$$

$$\|\mathbf{f}' \times \mathbf{f}''\| = t^2 + 2$$

$$\kappa = \frac{t^2 + 2}{(t^2 + 1)^{3/2}}$$

Aşağıda Arşimet spiralinin $0, 2\pi$ aralığında grafiği görülmektedir.



Yay uzunluğunu bulalım.

$$\|\mathbf{f}'(t)\| = \sqrt{t^2 + 1}$$

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{t^2 + 1} dt = \frac{1}{2} \left[t\sqrt{t^2 + 1} + \ln(\sqrt{t^2 + 1} + t) \right]$$

Grafikteki eğri uzunluğu $s(2\pi) = 21.26$ olur.

Bölüm 4

ÜÇ BOYUTLU ÖKLİT UZAYINDA YÜZEYLER

Yüzey, \mathbb{E}^3 uzayında sonsuz anlamda küçük bir kesimi düzlem gibi görülebilen noktalar kümesidir. Yapılan tanımla, bu bölüm altında ele alınacak yüzey kavramının sadece yumuşak (smooth) yüzeyleri ilgilendirdiği anlaşılmalıdır. Başka bir deyişle, yüzey üzerindeki herhangi nokta, en yakınındaki diğer noktalarla topolojik ilişkiye (komşuluk ilişkisine) sahip olmalıdır. Anılan gerekçelerle, topolojide yüzey kavramı iki boyutlu olarak değerlendirilir. İki boyut, yüzey üzerinde bir noktanın gösterilebilmesi için gerekli parametre sayısını ifade eder. Küre yüzeyinde açısız büyüklüklere karşılık gelen enlem $[-\pi/2, \pi/2]$ ve boylam $[0, 2\pi]$ bilgisinin fiziksel yeryüzünde belli bir noktayı tanımlaması yüzeyin geometrik gösterimine ve onun pratik kullanımına basit bir örnektir.

Diferansiyel geometride metrik tensör elemanlarıyla tanımlı uzunluk, en kısa yol, açı, alan gibi büyüklüklerin belirlenmesi bir yüzeye ilişkin temel problemlerin en başında yer alır. Bir uzay eğrisinin yerel konumunun, onun başlangıçtan diferansiyel sapmasına (yay uzunluğu cinsinden), eğrilik ve burulma değerlerine bağlı ifade edilebildiği önceki bölümde gösterilmişti. Jeodezik uygulamalarda ölçülen uzunluklar uzay eğrileri olmakla birlikte çoğunlukla yüzey eğrileridir. Bu nedenle bu eğriler üzerindeki noktaların global ya da yerel koordinatları, eğrinin doğal denklemleri kadar yüzey için seçilen parametre sistemine (iki boyutlu) de bağlıdır. Bu bölümde, eğriler ve yüzeyler arasındaki yakın ilişkiden yola çıkılarak, yüzey parametreleri cinsinden eğrilerin temel özelliklerinin belirlenmesi konusu ele

alınacaktır.

4.1 Fonksiyonlar ve Yüzeyler

Matematikte iki değişkenli fonksiyonlardan söz edildiğinde, genellikle x ve y ile gösterilen iki gerçekte sayı çiftine bağlı üçüncü bir gerçekte sayı anlaşılır:

$$z = f(x, y) \quad (4.1)$$

D , x, y değişkenlerinin alabileceği değerler kümesini belirten xy düzleminde kapalı bir bölge olsun. (4.1) ile D bölgesindeki her noktaya karşılık gelen ve xy düzleminde z kadar uzak bir noktalar kümesi,

$$S = \{x, y, z \in \mathbb{E}^3 \mid (x, y) \in D\} \quad (4.2)$$

başka bir deyişle \mathbb{E}^3 uzayında S yüzeyi oluşur (Şekil 4.1). Yüzey üzerinde aynı z değerine sahip noktaların oluşturduğu eğrilere eşyükseklik (seviye ya da nivo) eğrileri denir. $z = \text{sb.}$ eğrileriyle oluşturulan eşyükseklik haritası \mathbb{E}^3 uzayındaki yüzeyin, düzleme (xy) indirgenmiş bir başka gösterim biçimidir.

Matematikte çoğu kez S yüzeyinin gösterimi için bağımlı değişkenin açık biçimde yazılmadığı,

$$f(x, y, z) = 0 \quad (4.3)$$

kapalı eşitliği tercih edilir.

Örnek 4.1

a, b, c, d sabit sayılar olmak üzere düzlem denklemi,

$$ax + by + cz + d = 0$$

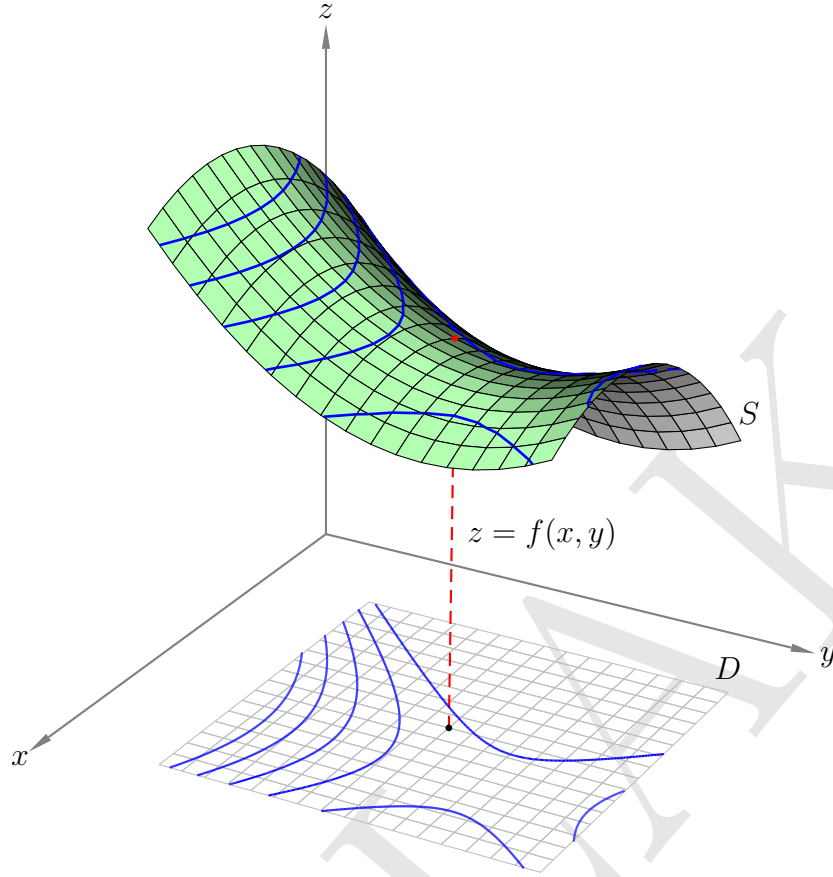
kapalı eşitliğiyle gösterilir. Merkezi koordinat sisteminin merkezi ile çakışık elipsoit denklemi için,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

eşitliği yazılabilir. Burada a, b ve c sırasıyla x, y, z yönünde elipsoidin boyutlarını (yarıksen uzunluklarını) tanımlar.

Kartezyen koordinatlar cinsinden f 'nin kısmi türevleri,

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad (4.4)$$



Şekil 4.1: İki değişkenli fonksiyon, xy düzleminde tanım kümesi ve yüzey gösterimi

gradyent vektörünün bileşenlerini oluşturur. (4.4), $\nabla f \neq \mathbf{0}$ koşulunu sağlıyorsa yüzey bu noktada düzgündür denir. S yüzeyinin düzgün her noktasında, gradyent vektör ile belirli yüzey normal ve bu normale dik teğet (yatay) düzlem vardır. Normalin yönü yüzeyin dışına doğrudur.

4.1.1 Yüzey normal ve teğet düzlemin denklemi

$f(x, y, z) = 0$, \mathbb{E}^3 uzayında bir yüzey denklemi, $\mathbf{x}(t) = [x(t), y(t), z(t)]$ yüzeyin P_0 noktasından geçen eğrinin denklemi olsun. Yüzey eğrisi boyunca $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$ eşitliği sağlanacağından, sabit bir sayı olarak f fonksiyonun t 'ye bağlı türevi (zincir kuralı yardımıyla),

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right]_0 = 0 \quad (4.5)$$

sonucunu verir. (4.5), gerçekte ∇f gradyent ve $\mathbf{x}'(t)$ teğet vektörün iç çarpımıdır:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_0 \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)_0 = 0 \quad (4.6)$$

Bu sonuca göre yüzey normali ve yüzey eğrisine teğet vektör, P_0 noktasında birbirlerine diktir. P_0 noktasından geçen farklı yönlerdeki tüm yüzey eğrileri için (4.6) geçerlidir. Eğrilerin teğet vektörleri bu noktada gradyent (normal) vektöre dik durumdaki yatay düzlem ile çakışır. Şekil 4.2 P_0 başlangıç noktasından geçen teğet vektörlerin oluşturduğu teğet düzlemi ve ona dik gradyent vektörü göstermektedir.

(4.5) eşitliği yardımıyla teğet düzlem denkleminde kolayca geçilebilir:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_0 (z - z_0) = 0 \quad (4.7)$$

Teğet düzleme karşılık, $k \in \mathbb{R}$ olmak üzere yüzey normali,

$$x = x_0 + k \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0, \quad y = y_0 + k \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0, \quad z = z_0 + k \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_0 \quad (4.8)$$

biçiminde parametrik olarak ya da

$$\frac{x - x_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0} = \frac{y - y_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0} = \frac{z - z_0}{\left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_0} \quad (4.9)$$

eşitliğiyle de gösterilebilir.

Örnek 4.2

$f(x, y, z) = x^2yz - y + z - 5 = 0$ kapalı eşitliği ile tanımlı bir yüzeyin, $(1, 1, 3)$ noktasındaki normal vektörünü, normal doğru denklemini ve teğet düzlemin denklemini bulalım.

Söz konusu yüzeyin normal vektörü için,

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_3 = 2xyz \mathbf{e}_1 + (x^2z - 1) \mathbf{e}_2 + (x^2y + 1) \mathbf{e}_3$$

çıkar. $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = 3$ koordinatlarına karşılık gelen gradyent vektörün bileşenleri,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0 = 6, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_0 = 2, \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)_0 = 2$$

olur. Sonuç olarak aynı noktada normal doğru denklemini,

$$\frac{x - 1}{6} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 3}{2}$$

ve teğet düzlemin denklemi,

$$(x - 1)6 + (y - 1)2 + (z - 3)2 = 3x + y + z - 7 = 0$$

ile ifade edilir.

Örnek 4.3

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ kapalı eşitliği ile tanımlı kürenin, $(1, 1, \sqrt{2})$ noktasındaki normal vektörünü, normal doğru denklemini ve teğet düzlemin denklemini bulalım.

Söz konusu yüzeyin normal vektörü için,

$$\nabla f = 2x\mathbf{e}_1 + 2y\mathbf{e}_2 + 2z\mathbf{e}_3$$

çıkar. $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = \sqrt{2}$ koordinatlarına karşılık gelen gradyent vektörün bileşenleri,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 2 \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = 2 \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = 2\sqrt{2}$$

olur. Normal doğru denklemi,

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$$

ve teğet düzlemin denklemi,

$$2(x - 1) + 2(y - 1) + 2\sqrt{2}(z - \sqrt{2}) = x + y + \sqrt{2}z - 4 = 0$$

ile ifade edilir.

Örnek 4.4

$f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} + z^2 - 1 = 0$ kapalı eşitliği ile tanımlı elipsoitinin $(1, 1, \frac{\sqrt{6}}{6})$ noktasındaki normal vektörü, normal doğru denklemini ve teğet düzlem denklemini bulalım.

$$\nabla f = x\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}y\mathbf{e}_2 + 2z\mathbf{e}_3$$

çıkar. $x_0 = 1, y_0 = 1, z_0 = \frac{\sqrt{6}}{6}$ koordinatlarına karşılık gelen gradyent vektörün bileşenleri,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0 = 1 \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0 = \frac{2}{3} \quad , \quad \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_0 = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

olur. Normal doğru denklemi,

$$x - 1 = \frac{3y - 3}{2} = \frac{18z - 3\sqrt{6}}{6\sqrt{6}}$$

ve teğet düzlemin denklemi,

$$(x - 1) + \frac{2}{3}(y - 1) + \frac{\sqrt{6}}{3}\left(z - \frac{\sqrt{6}}{6}\right) = 3x + 2y + \sqrt{6}z - 6 = 0$$

ile ifade edilir.

4.2 Düzenli Parametrik Yüzeyler

Uzay eğrilerinde olduğu gibi yüzey noktalarının kartezyen koordinatları parametrik denklemler kullanılarak ifade edilebilir. Parametrik gösterim yüzeylerin matematiksel olarak tanımlanmasının standart yoludur. Bir bakıma, kartezyen koordinatlar cinsinden verilen kapalı eşitlikler de parametrik denklemler olarak değerlendirilebilir. Nasıl ifade edilirse edilsin, kısaca yüzey düzlemdeki kapalı bir bölgenin üç boyutlu uzaya sürekli izdüşümüdür:

$$\mathbf{x} : D \in \mathbb{E}^2 \rightarrow S \in \mathbb{E}^3 \quad (4.10)$$

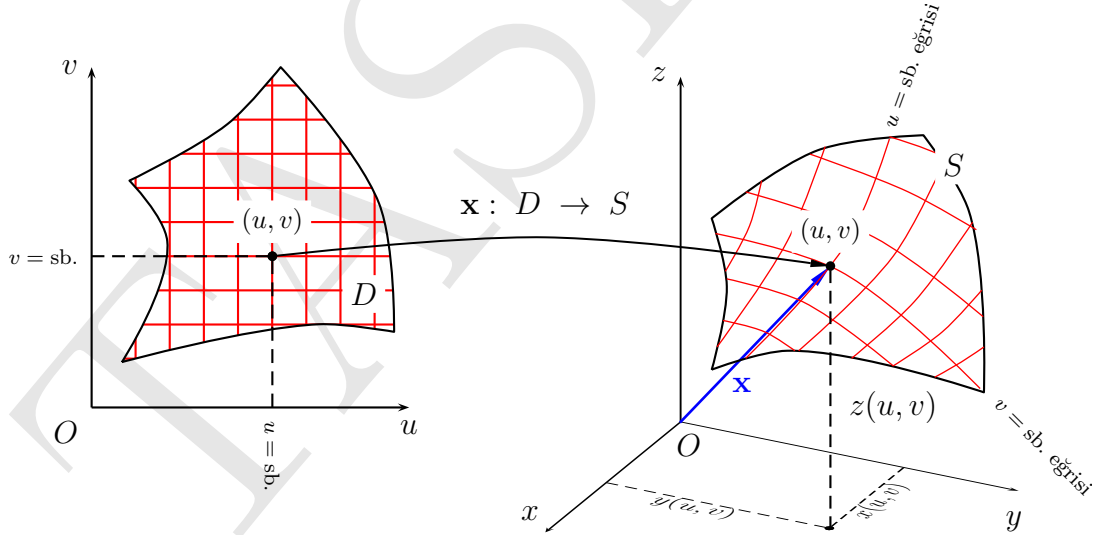
Burada \mathbf{x} vektör fonksiyonu,

$$\mathbf{x}(u, v) = x(u, v)\mathbf{e}_1 + y(u, v)\mathbf{e}_2 + z(u, v)\mathbf{e}_3 \quad (4.11)$$

yüzey üzerinde iki parametre yardımıyla tanımlanabilen bir noktanın yer vektörüdür. u ve v eğrisel yüzey koordinatları vektör fonksiyonun parametrelerini temsil eder; ilk kez Gauss tarafından kullanıldıkları için Gauss yüzey parametreleri olarak adlandırılırlar. Kartezyen koordinatlar için yazılan,

$$x = x(u, v) \quad , \quad y = y(u, v) \quad , \quad z = z(u, v) \quad (4.12)$$

eşitlikleri yüzeyin parametrik denklemleridir. u ve v parametrelerindeki her değişim uzayda farklı bir noktaya karşılık gelir. D bölgesindeki bir nokta $u = sb.$ ve $v = sb.$ doğrularının kesişimi iken, S yüzeyinde aynı nokta $u = sb.$ ve $v = sb.$ eğrilerinin kesişimi ile bellidir. $\mathbf{x}(u, v)$, \mathbb{E}^2 uzayındaki D düzlem alanını, \mathbb{E}^3 uzayındaki S yüzeyine dönüştürür (Şekil 4.3).



Şekil 4.3: D düzlem bölgesinin S yüzey parçasına izdüşümü

Parametrik yüzeylerin düzenli olma özelliği, diferansiyel izdüşüm matrisi, başka bir deyişle \mathbf{x} vektör fonksiyonunun Jakobi matrisi,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

yardımıyla incelenebilir. $\text{Rank}(\mathbf{J})$, (4.13)'de doğrusal bağımsız satırların sayısıdır. $\text{Rank}(\mathbf{J}) = 2$ eşitliği, S yüzeyinin düzenli olduğunun işaretidir. Rangın 2'den küçük olması durumunda, yüzey üzerinde tekil noktalardan söz edilir. Jakobi matrisinin sütun elemanları,

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad (4.14)$$

$$\mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \quad (4.15)$$

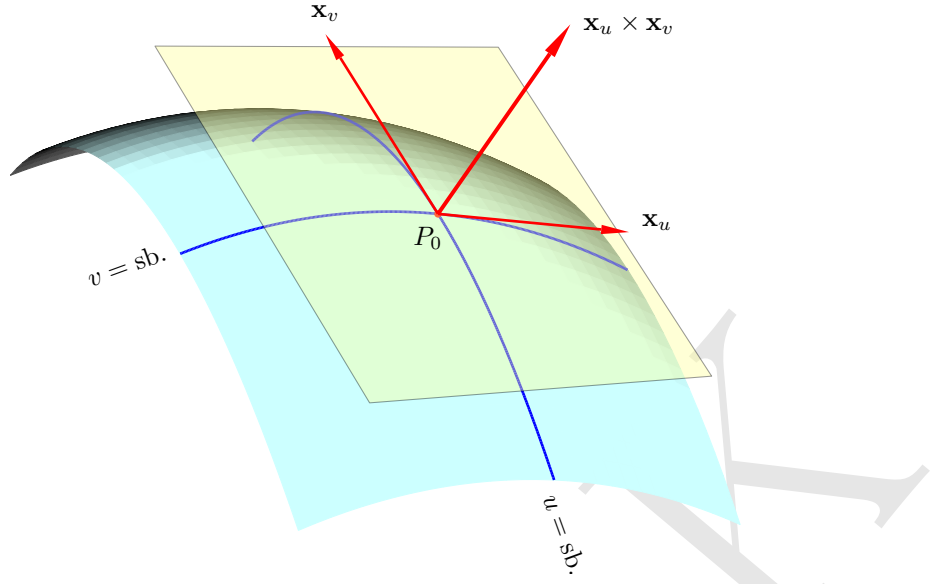
S yüzeyine doğrusal yaklaşım sağlayan, sırasıyla, $u = \text{sb.}$, $v = \text{sb.}$ eğrilerinin kesişim noktasındaki teğet vektörleridir (Şekil 4.4). Eğer yüzey bu noktada düzenliyse dış çarpım,

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq \mathbf{0} \quad (4.16)$$

\mathbf{x}_u ve \mathbf{x}_v vektörleri ile tanımlı teğet düzleme dik (yüzeyin dışına doğru) gradyent vektör doğrultusunu gösterir. Yüzey normalini birim vektöre dönüştüren eşitlik,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \quad (4.17)$$

ile verilir.



Şekil 4.4: Parametrik yüzeye teğet düzlem ve yüzey normali

Örnek 4.5

$\mathbf{x} = r \cos u \cos v \mathbf{e}_1 + r \cos u \sin v \mathbf{e}_2 + r \sin u \mathbf{e}_3$ ile tanımlı küre yüzeyi için yüzey birim normalini bulunuz.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u &= -r \sin u \cos v \mathbf{e}_1 - r \sin u \sin v \mathbf{e}_2 + r \cos u \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{x}_v &= -r \cos u \sin v \mathbf{e}_1 + r \cos u \cos v \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -r \sin u \cos v & -r \sin u \sin v & r \cos u \\ -r \cos u \sin v & r \cos u \cos v & 0 \end{pmatrix} \\ &= -r^2 \cos^2 u \cos v \mathbf{e}_1 - r^2 \cos^2 u \sin v \mathbf{e}_2 - r^2 \sin u \cos u \mathbf{e}_3 \\ \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| &= r^2 \cos u \\ \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = -\cos u \cos v \mathbf{e}_1 - \cos u \sin v \mathbf{e}_2 - \sin u \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Teorem 4.1 P_0 noktasından geçen tüm yüzey eğrilerinin teğet vektörleri teğet düzlemin içindedir.

u ve v yüzey parametreleri t 'nin fonksiyonu olsunlar: $u = u(t), v = v(t)$. Buna göre yüzey üzerindeki eğrinin parametrik denklemi,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \\ &= (x(t), y(t), z(t))\end{aligned}\quad (4.18)$$

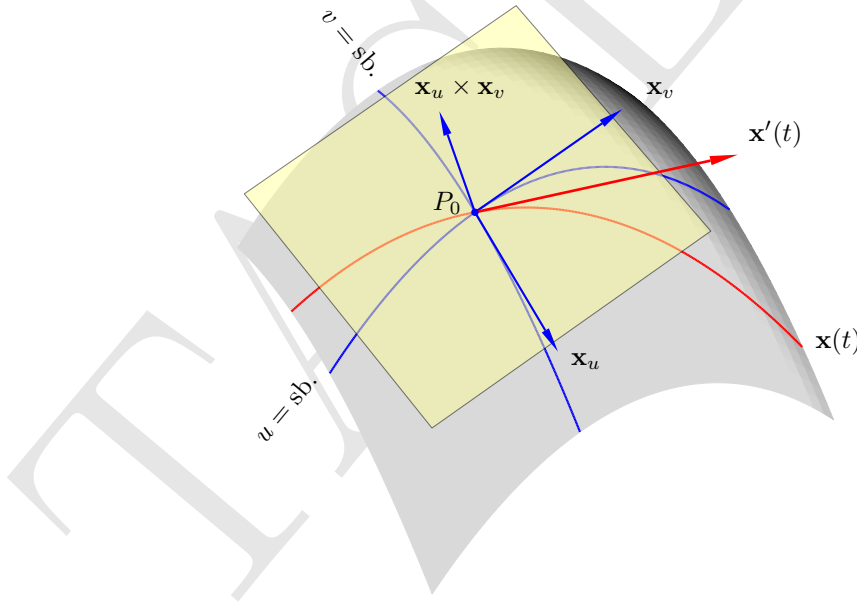
vektör eşitliğiyle gösterilir. (4.18) vektör fonksiyon bileşenlerinin türevleri (zincir kuralına göre),

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{dv}{dt} \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dt}\end{aligned}\quad (4.19)$$

\mathbf{x}_u ve \mathbf{x}_v 'nin fonksiyonları olduğundan yüzey eğrisinin teğet vektörü,

$$\mathbf{x}'(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt}\quad (4.20)$$

biçiminde yazılabilir. (4.20) eşitliği, teğet vektörün \mathbf{x}_u ve \mathbf{x}_v vektörlerinin doğrusal kombinasyonu olduğunu söylemektedir. Bu nedenle $\mathbf{x}'(t)$, yüzeye teğet düzlemin içinde kalır ve aynı zamanda yüzey normaline diktir (Şekil 4.5).



Şekil 4.5: Yüzey eğrisi $\mathbf{x}(t)$ ve teğet vektör $\mathbf{x}'(t)$

\mathbf{x}_u , \mathbf{x}_v ve $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$, üç boyutlu yerel (yüzey) koordinat sistemlerini oluştururlar. Fiziksel yeryüzünde jeodezik amaçlı yapılan gözlemler yerel gradyent vektör ve ona dik teğet düzlemlerle yakından ilişkilidir. Düzleşmiş bir teodolitın asal düşey eksenini, zıt yönlü gradyent vektör doğrultusu ile çakışık çekül doğrultusunu temsil eder. Aynı şekilde yatay açı tablası çekül doğrultusuna dik olduğu varsayılan nivo yüzeyine teğettir. Bu noktadan değişik hedeflere yapılan yatay doğrultu gözlemleri $\mathbf{x}'(t)$ teğet vektörüne karşılık gelir.

4.3 Birinci Temel Biçim

Bir yüzey üzerinde iki nokta arasındaki en kısa uzaklık bu iki nokta arasındaki doğru parçasının uzunluğudur. Ancak bu doğru genellikle eğrisel yüzeylerin dışındadır. Yüzey üzerinde en kısa bağlantı eğrisinin ya da herhangi bir yüzey eğrisinin uzunluğu, yüzey eğrilerinin parametre eğrileri ile yaptıkları açılar, parametre eğrileri ile sınırlanmış alanların belirlenmesi gibi problemlerin çözümünde birinci temel biçimden yararlanır (Pressley, 2001). Birinci temel biçim ile yüzey üzerinde diferansiyel anlamda bir uzunluk, yüzey parametrelerine bağlı olarak ifade edilir.

İzdüşüm fonksiyonu $\mathbf{x}(u, v)$ 'nin diferansiyelini oluşturalım:

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} dv \\ &= \mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv \end{aligned} \quad (4.21)$$

$d\mathbf{x}$ diferansiyel yer değiştirme vektörü, (4.20)'de olduğu gibi yüzeye teğet düzlemin elemanıdır. Eğrisel yüzey koordinatlardaki du, dv kadarlık diferansiyel artımın sonucu olarak, yüzey noktasının doğrusal konumsal değişimi gösterir. (4.21), gerçekte $\mathbf{x}(u, v)$ 'nin başlangıç noktası P_0 'a göre Taylor serisine açılımının,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= \mathbf{x}(u_0, v_0) + \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \right)_0 du + \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \right)_0 dv + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2} \right)_0 du^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v^2} \right)_0 dv^2 + \left(\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial v} \right)_0 dudv + \dots \end{aligned} \quad (4.22)$$

bir parçasıdır (doğrusal terimler).

$d\mathbf{x}$ vektörünün kendisiyle skaler çarpımı,

$$\begin{aligned} d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} &= (\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \cdot (\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \\ I &= (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) du^2 + 2(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) dudv + (\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) dv^2 \end{aligned} \quad (4.23)$$

Gauss'un birinci temel biçimi adı verilen eşitliği ortaya çıkarır. Katsayılar için,

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 \quad (4.24a)$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} \quad (4.24b)$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 \quad (4.24c)$$

kısaltmaları kullanılırsa birinci temel biçim, (3.7)'e göre,

$$ds = \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\| dt \quad (4.25)$$

olduğu göz önüne alınarak,

$$I : ds^2 = \|d\mathbf{x}\|^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \quad (4.26)$$

biçiminde yazılabilir. Burada ds , Şekil 4.6'da görüldüğü gibi yüzey üzerinde (u, v) ve $(u + du, v + dv)$ noktaları arasındaki diferansiyel uzunluk elemanıdır. (4.26) yüzeyin metrik özelliklerini tam olarak tanımlayan bir denklemdir. Birinci derece temel büyükler E, F, G yüzey eğrilerinin uzunlukların yanı sıra bunların $u = sb.$ ve $v = sb.$ eğrileriyle yaptığı açıların ve yüzey alanlarının hesaplanmasına olanak sağlar.

Örnek 4.6

Küre yüzeyi için birinci temel formu bulalım. Kürenin parametrik denklemi:

$$x = r \cos u \cos v$$

$$y = r \cos u \sin v$$

$$z = r \sin u$$

$$\mathbf{x}(u, v) = r \cos u \cos v \mathbf{e}_1 + r \cos u \sin v \mathbf{e}_2 + r \sin u \mathbf{e}_3$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -r \sin u \cos v$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -r \sin u \sin v$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = r \cos u$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -r \cos u \sin v$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = r \cos u \cos v$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

$$E = r^2 \quad F = 0 \quad G = r^2 \cos^2 u$$

$$ds^2 = r^2 du^2 + r^2 \cos^2 u dv^2$$

Örnek 4.7

Dönel elipsoit yüzeyi için birinci temel biçimi oluşturalım. Parametrik gösterim:

$$\mathbf{x}(u, v) = a \cos u \cos v \mathbf{e}_1 + a \cos u \sin v \mathbf{e}_2 + b \sin u \mathbf{e}_3$$

Kısmi türevler:

$$\mathbf{x}_u = -a \sin u \cos v \mathbf{e}_1 - a \sin u \sin v \mathbf{e}_2 + b \cos u \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{x}_v = -a \cos u \sin v \mathbf{e}_1 + a \cos u \cos v \mathbf{e}_2$$

Temel büyüklükler ve birinci temel biçim:

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u$$

$$F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$$

$$G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = a^2 \cos^2 u$$

$$ds^2 = (a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u) du^2 + a^2 \cos^2 u dv^2$$

u, v parametreleri elipsoit merkezinde oluşan açılar olup, v boylama u ise indirgenmiş enleme karşılık gelmektedir. İndirgenmiş enlem konusunda daha fazla bilgi için Üstün ve Demirel (2015)'e bakınız.

4.3.1 Yay uzunluğu, yüzey eğrileri arasında açı ve alan hesabı

t parametresine göre yüzey eğrisinin t_1 ve t_2 noktaları arasındaki uzunluğu (4.25)'den,

$$\begin{aligned} s = s(t) &= \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right\| dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right]^{1/2} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\left(\mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \right) \cdot \left(\mathbf{x}_u \frac{du}{dt} + \mathbf{x}_v \frac{dv}{dt} \right) \right]^{1/2} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2F \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + G \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt \end{aligned} \quad (4.27)$$

bulunur. (4.27) birinci temel biçimin t parametresine bağlı ifadesidir.

Örnek 4.8

(4.27) bağıntısından yararlanarak loksodrom eğrisinin¹ uzunluğunu bulalım. loksodromun genel eşitliği,

$$\lambda = \lambda_0 + \tan \alpha \left(\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_0}{2} \right) \right)$$

biçimindedir. $\lambda_0 = \varphi_0 = 0$ ve $\lambda \rightarrow v$, $\varphi \rightarrow u$ alınarak,

$$v = \tan \alpha \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right)$$

elde edilir ($\tan \alpha = sbt$).

$$u = t$$

$$v = \tan \alpha \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{t}{2} \right)$$

şeklinde t parametresi seçilir ise türevler,

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 1 \\ \frac{dv}{dt} &= \frac{\tan \alpha}{\cos t} \end{aligned}$$

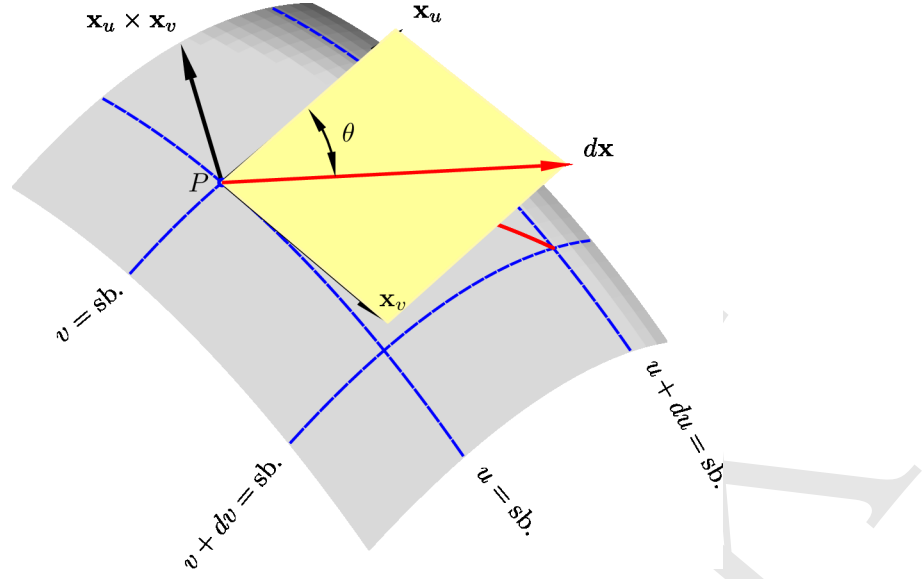
elde edilir. Küre yüzeyi için temel büyüklükler $E = r^2$, $F = 0$, $G = r^2 \cos^2 u = r^2 \cos^2 t$ (4.27) eşitliğinde yerine konulursa:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{r^2 + r^2 \cos^2 t \left(\frac{\tan \alpha}{\cos t} \right)^2} dt \\ &= r \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} dt \\ &= r \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} \left. t \right|_{t_1}^{t_2} \\ &= r \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} (t_2 - t_1) \\ \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} &= \frac{1}{\cos \alpha} \end{aligned}$$

ve $u = t$ alınır, bilinen loksodrom uzunluğu bağıntısı elde edilir.

$$s(u) = \frac{r}{\cos \alpha} (u_2 - u_1)$$

¹Loksodrom tüm meridyenleri sabit açı altında kesen yüzey eğrisi olup, küreye sarılan helis eğrisidir.



Şekil 4.6: (u, v) ve $(u + du, v + dv)$ yüzey eğrileri ile sınırlandırılan diferansiyel uzunluk elemanı ds

u ve v yüzey eğrileri arasındaki açı ω , teğet vektörler \mathbf{x}_u ve \mathbf{x}_v yardımıyla bulunabilir. Bu iki vektörün skaler çarpımı,

$$\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \|\mathbf{x}_u\| \cdot \|\mathbf{x}_v\| \cos \omega \quad , \quad \cos \omega = \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u\| \cdot \|\mathbf{x}_v\|} \quad (4.28)$$

oluşturulur ve (4.24) eşitlikleri göz önüne alınırsa Gauss parametre eğrileri arasındaki açı için,

$$\cos \omega = \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v}{\sqrt{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u} \sqrt{\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v}} = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (4.29)$$

eşitliği elde edilir. u ve v parametre eğrileri ortogonal ($\omega = \pi/2$) ise (4.29)'a göre $F = 0$ sonucu ortaya çıkar.

Parametre eğrileri arasındaki açı iki vektörün vektörel çarpımından da bulunabilir.

$$\sin \omega = \frac{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}{\|\mathbf{x}_u\| \|\mathbf{x}_v\|} \quad (4.30)$$

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = \sqrt{EG - F^2}$$

olduğundan, $\Delta = \sqrt{EG - F^2}$ kısaltması ile,

$$\sin \omega = \frac{\Delta}{\sqrt{EG}} \quad (4.32)$$

elde edilir. Uygulamada çoğu kez yüzey parametrelerinin $F = 0$ özelliğini gösterecek şekilde seçilmesi hedeflenir. Böylelikle yüzey parametre eğrilerinin düzlemdekine benzer diferansiyel bir kare ağı oluşturmasının önü açılmış olur.

P 'den geçen yüzey eğrisinin $v = \text{sb.}$ eğrisi ile yaptığı açığı bulmak isteyelim. Yüzey eğrisine teğet vektör $\mathbf{x}'(t)$ ile $v = \text{sb.}$ eğrisine teğet \mathbf{x}_u arasındaki θ açısı (Şekil 4.6), $d\mathbf{x}$ 'in, $\mathbf{x}'(t)$ doğrultusundaki yer değiştirme vektörü olduğu göz önüne alınarak,

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}'(t)}{\|\mathbf{x}_u\| \cdot \|\mathbf{x}'(t)\|} = \frac{\mathbf{x}_u \cdot d\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}_u\| \cdot \|d\mathbf{x}\|} \quad (4.33)$$

eşitliğinden elde edilir. (4.33)'da (4.21), (4.24) ve (4.26) eşitlikleri yerlerine yazılırsa,

$$\cos \theta = \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{E} \cdot ds} \quad (4.34)$$

çıkar. Ortogonal yüzey ağlarında $F = 0$ nedeniyle (4.34),

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{E} \cdot du}{ds} \quad (4.35)$$

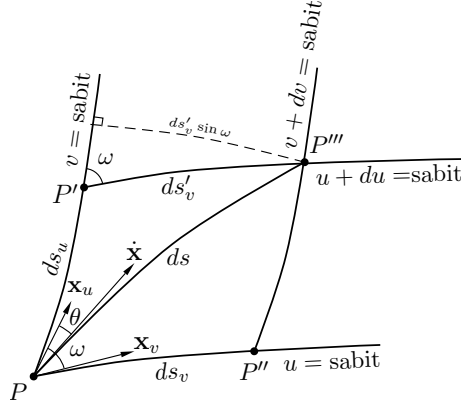
eşitliğine dönüşür. $u = \text{sb.}$ ve $v = \text{sb.}$ eğrileri boyunca diferansiyel koordinat değişimlerine karşılık (4.26)'dan,

$$ds_u = \sqrt{E}du \quad , \quad ds_v = \sqrt{G}dv \quad (4.36)$$

diferansiyel yay uzunlukları elde edileceğinden (4.35),

$$\cos \theta = \frac{ds_u}{ds} \quad (4.37)$$

biçiminde de yazılabilir. Son eşitlik yüzey üzerindeki açıların da birinci temel biçime bağlı olarak tanımlandığını ortaya koymaktadır.

Şekil 4.7: (u, v) parametre eğrileri

Şekil 4.7'den ve (4.32) den,

$$\sin \theta = \frac{ds_v \sin \omega}{ds} = \frac{\sqrt{G} dv}{ds} \frac{\Delta}{\sqrt{EG}} = \frac{\Delta}{\sqrt{E}} \frac{dv}{ds} \quad (4.38)$$

elde edilir. (4.35) ve (4.38) ile,

$$\tan \theta = \frac{\Delta dv}{E du + F dv} \quad (4.39)$$

çıkar.

Parametre eğrileri birbirine dikse $F = 0$ nedeniyle (4.35), (4.38) ve (4.39) eşitlikleri,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\sqrt{E} du}{ds} = \frac{ds_u}{ds} \\ \sin \theta &= \frac{\sqrt{G} dv}{ds} = \frac{ds_v}{ds} \\ \tan \theta &= \frac{\sqrt{G} dv}{\sqrt{E} du} = \frac{ds_v}{ds_u} \end{aligned} \quad (4.40)$$

olur.

Örnek 4.9

Küre yüzeyinde iki noktayı birleştiren Loksodrom eğrisinin $v = \text{sabit}$ eğrisi ile açısını bulalım. Kürede temel büyüklükler:

$$E = r^2 \quad G = r^2 \cos^2 u$$

4.40 eşitliği küre için düzenlenir ve $\tan \theta = \text{sabit}$ alınırsa,

$$\begin{aligned}\tan \theta &= \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{dv}{du} = \cos u \frac{dv}{du} \\ dv &= \tan \theta \frac{1}{\cos u} du \\ \int_{v_1}^{v_2} dv &= \tan \theta \int_{u_1}^{u_2} \frac{1}{\cos u} du \\ v \Big|_{v_1}^{v_2} &= \tan \theta \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2} \right) \Big|_{u_1}^{u_2} \\ \tan \theta &= \frac{v_2 - v_1}{\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u_2}{2} \right) - \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{u_1}{2} \right)}\end{aligned}$$

elde edilir.

Yüzey üzerinde u, v ve $u+du, v+dv$ eğrilerinin sınırladığı alan dA olsun. (4.36)'e göre ds_u ve ds_v söz konusu parametre eğrileri ile tanımlı diferansiyel paralelkenarın kenar uzunlukları olmuş olur. $\sqrt{E} = \|\mathbf{x}_u\|$ ve $\sqrt{G} = \|\mathbf{x}_v\|$ eşitlikleri göz önüne alındığında diferansiyel alan,

$$dA = ds_u ds_v \sin \omega = \|\mathbf{x}_u\| \cdot \|\mathbf{x}_v\| \sin \omega du dv \quad (4.41)$$

ile gösterilir. (4.41), (2.19)'ya göre,

$$dA = \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| du dv \quad (4.42)$$

biçimine dönüştürülür, (4.31) dikkate alınır,

$$dA = \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (4.43)$$

bulunur. Eşitliğin her iki yanı için uygulanacak integral, $\Delta = \sqrt{EG - F^2}$ kısaltması ile, parametre eğrileri arasındaki B bölgesinin yüzey alanını,

$$A = \iint_B \Delta du dv \quad (4.44)$$

verir. Δ değeri yüzey normalinin normu (pozitif tanımlı) yardımıyla hesaplanan bir büyüklük olduğundan yüzeyin düzenli olduğu her noktada $\Delta > 0$ eşitsizliğini sağlar.

Örnek 4.10

Küre yüzeyi için u ve v eğrileri ile sınırlı bir bölgenin alanını bulalım. Küre yüzeyi için birinci temel form:

$$\begin{aligned} ds^2 &= r^2 du^2 + r^2 \cos^2 u dv^2 \\ E &= r^2 \quad F = 0 \quad G = r^2 \cos^2 u \\ \Delta &= \sqrt{EG - F^2} = r^2 \cos u \\ A &= r^2 \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} \cos u \, dudv = r^2 \sin u \Big|_{u_1}^{u_2} \Big|_{v_1}^{v_2} \\ &= r^2 (\sin u_2 - \sin u_1)(v_2 - v_1) \end{aligned}$$

Coğrafi koordinatlara göre düzenlenirse ($u \rightarrow \varphi$, $v \rightarrow \lambda$),

$$A = r^2 (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)(\lambda_2 - \lambda_1)$$

elde edilir.

4.4 İkinci Temel Biçim

Bir yüzeyin eğriliği ikinci temel biçimden yararlanılarak araştırılır (Pressley, 2001).

\mathbb{E}^3 uzayında parametrik denklemi $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v)$ ile verilen bir yüzey üzerinde birim normal vektörü,

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\Delta} \quad (4.45)$$

ile tanımlamıştık. $\mathbf{x}(u, v)$ en az iki kez türevlenebilir olmak üzere parametrik yüzeyin ikinci temel biçimi,

$$\text{II} = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \quad (4.46)$$

eşitliğiyle gösterilir. (u, v) koordinatları bilinen bir noktada L, M, N katsayıları (ikinci temel büyüklükler), \mathbf{x} 'in ikinci dereceden kısmi türevlerinin birim normal vektör doğrultusuna izdüşümü biçiminde hesaplanır:

$$L = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2} \cdot \mathbf{u} \quad (4.47a)$$

$$M = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial v} \cdot \mathbf{u} \quad (4.47b)$$

$$N = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v^2} \cdot \mathbf{u} \quad (4.47c)$$

(4.45), (4.47) eşitliklerinde yerine konular ve skaler üçlü çarpım uygulanırsa,

$$L = \frac{[\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v \mathbf{x}_{uu}]}{\Delta} = \Delta^{-1} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \end{pmatrix} \quad (4.48a)$$

$$M = \frac{[\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v \mathbf{x}_{uv}]}{\Delta} = \Delta^{-1} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \end{pmatrix} \quad (4.48b)$$

$$N = \frac{[\mathbf{x}_u \mathbf{x}_v \mathbf{x}_{vv}]}{\Delta} = \Delta^{-1} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \end{pmatrix} \quad (4.48c)$$

elde edilir. İzdüşüm büyüklükleri L, M, N yüzeyin teğet düzleminden ne kadar uzaklaştığını açıkladığı için ikinci temel biçim, yüzey eğriliğinin geometrik bir yorumu olarak değerlendirilir.

İkinci temel biçim yüzey birim normal vektörü \mathbf{u} 'nun türevi yardımıyla da ikinci bir yoldan daha tanımlanabilir. Bunun için $d\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0$ eşitliğinin türevini alalım,

$$d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} + d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{u} = 0$$

ve

$$d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = -d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{u} \quad (4.49)$$

biçiminde yeniden düzenleyelim. $d\mathbf{u}$ birim normal vektöre dik ve teğet düzlem içerisinde bulunur. $\mathbf{u}_u = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u}$ ve $\mathbf{u}_v = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial v}$ olmak üzere \mathbf{u} 'nun diferansiyeli,

$$d\mathbf{u} = \mathbf{u}_u du + \mathbf{u}_v dv \quad (4.50)$$

(4.49)'te yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} d^2\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} &= -(\mathbf{x}_u du + \mathbf{x}_v dv) \cdot (\mathbf{u}_u du + \mathbf{u}_v dv) \\ &= -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{u}_u du^2 - \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{u}_v dudv - \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{u}_u dvdu - \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{u}_v dv^2 \\ &= -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{u}_u du^2 - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{u}_v + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{u}_u) dudv - \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{x}_v dv^2 \end{aligned} \quad (4.51)$$

çıkar. $\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{u} = 0$ ve $\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{u} = 0$ eşitliklerinin u ve v 'ye göre türevleri oluşturulur,

$$\mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{u}_u = 0 \quad (4.52a)$$

$$\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{u}_v = 0 \quad (4.52b)$$

$$\mathbf{x}_{vu} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{u}_u = 0 \quad (4.52c)$$

$$\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{u}_v = 0 \quad (4.52d)$$

ve (4.51)'da göz önünde bulundurulursa,

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot d^2\mathbf{x} &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{u} du^2 + (\mathbf{x}_{vu} \cdot \mathbf{u} + \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{u}) du dv + \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{u} dv^2 \\ &= \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{u} du^2 + 2(\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{u}) du dv + \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{u} dv^2\end{aligned}\quad (4.53)$$

bulunur. (4.47), (4.51) ve (4.53) eşitlikleri karşılaştırıldığında Gauss'un ikinci temel büyüklükleri için,

$$L = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{u}_u \quad (4.54a)$$

$$M = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{u} = -\frac{1}{2}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{u}_v + \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{u}_u) \quad (4.54b)$$

$$N = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{u} = -\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{u}_v \quad (4.54c)$$

eşitlikleri ortaya çıkar.

Örnek 4.11

Küre yüzeyi için ikinci temel biçimi bulalım.

$$\mathbf{x}(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u)$$

Kısmi türev vektörleri:

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u)$$

$$\mathbf{x}_{uu} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2} = (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, -r \sin u)$$

$$\mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = (-r \cos u \sin v, r \cos u \cos v, 0)$$

$$\mathbf{x}_{vv} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v^2} = (-r \cos u \cos v, -r \cos u \sin v, 0)$$

$$\mathbf{x}_{uv} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial v} = (r \sin u \sin v, -r \sin u \cos v, 0)$$

Birinci temel form önceden $ds^2 = r^2 du^2 + r^2 \cos^2 u dv^2$ olarak bulunmuştu. Birim normal vektör:

$$\Delta = \sqrt{EG - F^2} = r^2 \cos u$$

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = (-r^2 \cos^2 u \cos v, -r^2 \cos^2 u \sin v, -r^2 \sin u \cos u)$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\Delta} = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

İkinci temel form:

$$L = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{u} = r$$

$$M = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$N = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{u} = r \cos^2 u$$

$$II : r du^2 + r \cos^2 u dv^2$$

Örnek 4.12

Dönel elipsoit için ikinci temel biçimi bulalım.

$$\mathbf{x}(u, v) = a \cos u \cos v \mathbf{e}_1 + a \cos u \sin v \mathbf{e}_2 + b \sin u \mathbf{e}_3$$

Kısmi türevler:

$$\mathbf{x}_u = -a \sin u \cos v \mathbf{e}_1 - a \sin u \sin v \mathbf{e}_2 + b \cos u \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{x}_v = -a \cos u \sin v \mathbf{e}_1 + a \cos u \cos v \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}_{uu} = -a \cos u \cos v \mathbf{e}_1 - a \cos u \sin v \mathbf{e}_2 - b \sin u \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{x}_{uv} = a \sin u \sin v \mathbf{e}_1 - a \sin u \cos v \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}_{vv} = -a \cos u \cos v \mathbf{e}_1 - a \cos u \sin v \mathbf{e}_2$$

Örnek 4.7'den $\Delta = \sqrt{EG - F^2} = a \cos u \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}$ olur.

Yüzey birim normali (\mathbf{u}):

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = -ab \cos^2 u \cos v \mathbf{e}_1 - ab \cos^2 u \sin v \mathbf{e}_2 - a^2 \sin u \cos u \mathbf{e}_3$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\Delta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} (-b \cos u \cos v \mathbf{e}_1 - b \cos u \sin v \mathbf{e}_2 - a \sin u \mathbf{e}_3) \end{aligned}$$

Temel büyüklükler \mathbf{u} vektörü ile bulunur.

$$L = \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{u} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}}$$

$$M = \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{u} = 0$$

$$N = \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{u} = \frac{ab \cos^2 u}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}}$$

İkinci temel biçim:

$$II : \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} du^2 + \frac{ab \cos^2 u}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} dv^2$$

4.5 Bir Yüzeyin Eğrilikleri ve Normal Kesit

u, v parametre eğrilerinin $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ teğet vektörleri ile \mathbf{u} birim normal vektörü parametre ağının düzenli her noktasında Gauss üçlüsü adı verilen bir üçlü oluşturur (Şekil4.6). $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ teğet vektörlerinin birbirine dik olma zorunluluğu olmayıp, birim vektör de değildir. Yalnız ortogonal parametre ağlarında bu vektörler birbirine diktir. Gauss yüzey geometrisinde Gauss üçlüsü önemlidir.

Bir yüzey noktasındaki eğrilik (noktaya sonsuz yakınlıktaki yüzey eğriliği) 2. temel biçim ile tanımlanır. II/I oranı oluşturulur ve (3.34) ya da (3.38) göz önüne alınır,sa,

$$\frac{II}{I} = \frac{d^2\mathbf{x}\mathbf{u}}{ds^2} = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}\mathbf{u} = k(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) = k \cos \delta = k_n = \frac{1}{R_n} \quad (4.55)$$

çıkar. Burada k , yüzey eğrisinin bir noktasındaki eğrilik ve δ , bu noktadaki \mathbf{n} birim asal normal vektörü ile \mathbf{u} birim yüzey normal vektörü arasındaki açıdır. (4.55), *Meusnier bağıntısı* olarak adlandırılır.

(4.55)'e göre yüzeyin sabit bir noktasından geçen ve oskülatör düzlemleri çakışan tüm yüzey eğrilerinin o noktadaki eğrilikleri eşittir. Yüzey eğrilerinin eğrilik özelliklerini araştırmak için ilgili noktadaki teğet vektörleri içeren düzlem kesitleri dikkate almak yeterlidir. Teğet vektör ve yüzey normalini içeren düzlemin yüzey ile arakesitine *normal kesit (düşey kesit)* ve eğrilğine *normal eğrilik (k_n)* denir. Bir yüzey eğrisi normal kesit ise k eğriliği $\delta = 0$ nedeniyle normal eğriliğe eşittir: $k = k_n$. Bir yüzeyin normal eğriliği, yüzey üzerindeki noktanın konumuna ve teğet vektörün doğrultusuna bağlıdır. Yüzey eğrisinin özelliklerine bağlı değildir. Bu yüzden bir yüzeyin normal eğriliğinden belli bir doğrultudaki normal eğrilik anlaşılır.

Bir yüzeyin herhangi bir kesitinin eğrilik çemberi kesit düzlemi içinde bulunur. Bir yüzey noktasında belli bir doğrultudaki tüm eğrilik çemberleri, merkezi normal kesit düzleminde olan R_n yarıçaplı, *Meusnier küresi* adı verilen bir küre oluştururlar.

Bir yüzey noktasındaki eğik kesit eğrilik yarıçapı r ile gösterilirse $k = \frac{1}{r}$ ve $k_n = 1/R_n$ nedeniyle (4.55)'den,

$$r = R_n \cos \delta \quad (4.56)$$

olur.

Genel olarak sabit bir yüzey noktasındaki normal eğrilik, doğrultuya bağlı olarak değişir. Normal eğriliğin en küçük ve en büyük değerlerini bulmak için,

$$\frac{1}{R_n} = k_n = \frac{L du^2 + 2M du dv + N dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} = \frac{II}{I} \quad (4.57)$$

oranının pay ve paydasını $dv/du = 1/\lambda$ nın fonksiyonu biçiminde yazarak λ ya göre türevi sıfıra eşitlemek gerekir. Tüm dv/du doğrultuları için (4.57) oranının sabit kaldığı tekil noktalar² dışındaki tüm yüzey noktalarında normal eğriliğin en küçük ve en büyük olduğu birbirine dik iki doğrultu vardır. Bu doğrultulara *asal eğrilik doğrultuları* bunlara karşılık k_1, k_2 eğriliklerine *asal eğrilikler* ve ilgili R_1, R_2 yarıçaplarına *asal eğrilik yarıçapları* denir. Her noktadaki teğetleri asal eğrilik doğrultuları (asal kesit doğrultuları) ile çakışan eğrilere *eğrilik eğrileri* adı verilir. Bu eğriler, her yüzeyde gerçek, ortogonal bir eğri ağı oluşturur (tekil noktalarda eğrilik ağı yok olur). Parametre eğrileri, yalnızca $F = M = 0$ ise eğrilik eğrileridir. Küre ya da elipsoit yüzeyindeki meridyen ve paralel daireler bu özellikte olan eğrilerdir.

(4.57)'den $\frac{dR_n}{d\lambda} = 0$ denklemini sağlayan λ değerlerinin belirlediği doğrultular için,

$$2H = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (4.58)$$

olmak üzere,

$$k_n^2 - 2Hk_n + K = 0 \quad (4.59)$$

denklemini ve buradan,

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{1}{R_1} = H + \sqrt{H^2 - K} \\ k_2 &= \frac{1}{R_2} = H - \sqrt{H^2 - K} \end{aligned} \quad (4.60)$$

asal eğrilikleri çıkar. k_2 en küçük ve k_1 en büyüktür. Asal eğriliklerden elde edilen,

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \quad (4.61)$$

$$K = k_1 k_2 = \frac{1}{R_1 R_2} \quad (4.62)$$

H , ortalama eğrilik ve K , *Gauss eğrilik ölçütü* olarak adlandırılır. *Gauss eğrilik yarıçapı* asal eğrilik yarıçaplarının geometrik ortalamasıdır:

$$R_G = \frac{1}{\sqrt{K}} = \sqrt{R_1 R_2} \quad (K > 0) \quad (4.63)$$

Parametre eğrileri eğrilik eğrileriyle çakışırsa $F = M = 0$ nedeniyle (4.58)'den,

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left(\frac{N}{G} + \frac{L}{E}\right) & K &= \frac{LN}{EG} \\ R_1 &= \frac{G}{N} & R_2 &= \frac{E}{L} \end{aligned} \quad (4.64)$$

²Örnek: Küre ya da elipsoit yüzeyinde kutuplar tekil noktalardır.

elde edilir.

Örnek 4.13

Küre yüzeyi için asal eğrilik doğrultularını belirleyelim.

Kürede birinci ve ikinci temel form

$$I : ds^2 = R^2 du^2 + R^2 \cos^2 u dv^2,$$

$$II : R du^2 + R \cos^2 u dv^2 \text{ olduğundan, } E = R^2, G = R^2 \cos^2 u, L = R, N = R \cos^2 u \text{ olur.}$$

Buradan,

$$R_1 = \frac{G}{N} = R \qquad R_2 = \frac{E}{L} = R$$

olduğu görülür. Bunun anlamı küre yüzeyinde her noktada ve her doğrultuda eğriliğin sabit olmasıdır.

Örnek 4.14

Dönel elipsoit yüzeyi için Gauss eğrilik ölçütü ve asal eğrilik doğrultularını belirleyelim.

Örnek 4.7 ve 4.12'den

$$\begin{aligned} E &= a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u & F &= 0 & G &= a^2 \cos^2 u \\ L &= \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} & M &= 0 & N &= \frac{ab \cos^2 u}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} \end{aligned}$$

Gauss eğrilik ölçütü:

$$K = \frac{LN}{EG} = \frac{b^2}{(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^2}$$

Gauss eğrilik yarıçapı:

$$R_G = \frac{1}{\sqrt{K}} = \frac{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}{b}$$

Asal eğrilik yarıçapları:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{G}{N} = \frac{a\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}}{b} \\ R_2 &= \frac{E}{L} = \frac{(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)^{3/2}}{ab} \end{aligned}$$

Parametre seçiminde u indirgenmiş enleme, v boylama karşılık geldiğinden, R_1 meridyene dik, R_2 ise meridyen doğrultusundaki eğrilik yarıçaplarına karşılık gelmektedir. Dönel elipsoit yüzeyinde eğriliğin hem u parametresine hem de yöne bağlı olduğu da dikkat çekmektedir.

Bir yüzey noktasından çıkan ve bu noktadaki sabit bir teğet vektör ile θ açısı yapan doğrultular için (4.57) eşitliği bir koni kesitinin denklemini gösterir. Bir yüzey noktasındaki sabit teğet vektör ile asal eğrilik doğrultularından R_1 eğrilik yarıçapına ilişkin asal eğrilik doğrultusu arasındaki açı θ olsun (Şekil 4.7). Bu vektör doğrultusundaki normal eğrilik,

$$k_n(\theta) = \frac{1}{R_n(\theta)} = \frac{\cos^2 \theta}{R_1} + \frac{\sin^2 \theta}{R_2} \quad (4.65)$$

bağıntısıyla belirlenir. Bu bağıntıya Euler denklemi adı verilir. Asal eğrilik yarıçapları ve parametre eğrilerine göre asal eğrilik doğrultularının doğrultu açıları bilinirse Euler denklemi yardımıyla, belli bir doğrultudaki normal kesit eğriliği ve eğrilik yarıçapı hesaplanabilir. Burada θ açısı $v = \text{sabit}$ ve $u = \text{sabit}$ eğrileri eğrilik eğrileri olmak üzere herhangi bir yüzey eğrisinin teğeti ile $v = \text{sabit}$ eğrisi arasındaki açı olup, küre ve elipsoit yüzeylerinde meridyenle olan açığa (azimut) karşılık gelir.

Herhangi bir doğrultudaki normal eğrilik yarıçapı ρ_1 ve ona dik doğrultudaki ρ_2 ise (4.65) bağıntısından,

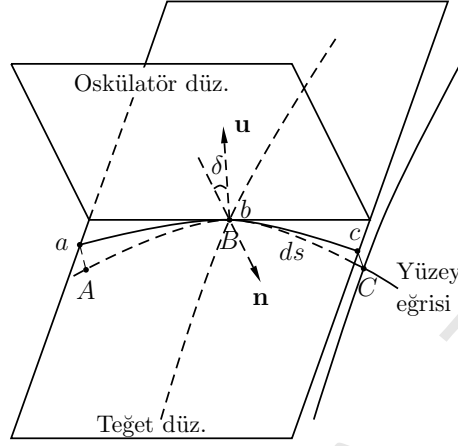
$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (4.66)$$

çıkar. Buna göre bir yüzey noktasında birbirine dik iki normal kesitin eğrilikleri toplamı sabit olup, o noktadaki asal eğrilikler toplamına eşittir.

4.6 Jeodezik Eğrilik ve Jeodezik Eğri

A, B, C yüzey eğrisi üzerinde üç nokta ve bu noktaların B noktasındaki teğet (yatay) düzlem üzerindeki izdüşümleri a, b, c olsun (Şekil 4.8). a, b, c noktaları teğet düzlem içinde bir eğrilik çemberi belirler. Yüzey eğrisinin teğet düzleme izdüşümü bir düzlem eğri oluşturur. Bu düzlem eğrinin eğriliğine yüzey eğrisinin jeodezik eğriliği denir. Jeodezik eğrilik yarıçapı R_g ve jeodezik eğrilik k_g ile gösterilir ($k_g = 1/R_g$). a, b, c noktaları bir doğru oluşturursa $k_g = 0$ dır. Bu durumun gerçekleşmesi için eğrinin oskülatör düzleminin o noktada yüzeye dik olması, başka bir deyişle eğri asal normali \mathbf{n} ve yüzey normali \mathbf{u} vektörlerinin çakışması gerekir. Her noktasında bu özelliğin geçerli olduğu ya da her noktasında jeodezik eğriliği sıfır olan eğriye *jeodezik eğri* denir. Buna göre jeodezik eğrinin her noktasında oskülatör düzlemi aynı

zamanda yüzeyin normal düzlemidir. Bu nedenle jeodezik eğrinin asal normalleri ilgili noktalarda yüzey normalleri ile çakışmıştır. Asal normal, yüzey normaline zıt yöndedir (Grossmann, 1976).



Şekil 4.8: Yüzey eğrisi ve teğet düzlem üzerindeki izdüşümü

Jeodezik eğri, iki yüzey noktası arasında en kısa bağlantı eğrisi olma özelliğini taşır. Düzlemdeki doğrunun ve küre üzerindeki büyük daire yayının yerini tutar.

Jeodezik eğrilik, normal eğriliğin fonksiyonu biçiminde hesaplanabilir. Bir yüzey eğrisinin P noktasındaki eğrilik yarıçapı r ile bu noktadaki normal eğrilik yarıçapı R_n arasındaki ilişki (4.56)'e göre,

$$r = R_n \cos \delta \quad (\text{Meusnier bağıntısı}) \quad (4.67)$$

idi. δ , oskülatör düzlemi ile normal kesit düzlemi arasındaki açıdır.

Yüzey eğrisinin P noktasındaki diferansiyel parçasının A ve C kiriş uzunluğu s ve kiriş yüksekliği h ile gösterilirse $h \rightarrow 0$ için,

$$r \approx \frac{s^2}{8h} \quad (4.68)$$

yazılabilir. Yatay düzlem, normal kesit düzlemine dik ve oskülatör düzlemi ile $\frac{\pi}{2} - \delta$ açısı yaptığından h 'nin yatay düzlem üzerindeki izdüşümü h_g ,

$$h_g = h \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = h \sin \delta \quad (4.69)$$

olur. Yüzey eğrisinin yatay düzlem üzerindeki izdüşümünün eğrilik yarıçapı R_g için (4.68)'ya benzer biçimde,

$$R_g = \frac{s^2}{8h_g} = \frac{r}{\sin \delta}$$

yazılabilir (izdüşüm $s_g = s$ kabul ediliyor). Bu eşitlikte (4.67) göz önüne alınırsa,

$$R_g = \frac{r}{\sin \delta} = R_n \cot \delta \quad (4.70)$$

çıkar.

(4.67) ve (4.70)'den, bir yüzey eğrisinin eğik kesit eğriliği $k = \frac{1}{r}$, normal eğriliği $k_n = \frac{1}{R_n}$ ve jeodezik eğriliği $k_g = \frac{1}{R_g}$ arasında aşağıdaki ilişkiler,

$$\begin{aligned} k_n &= k \cos \delta \\ k_g &= k \sin \delta \\ k^2 &= k_n^2 + k_g^2 \end{aligned} \quad (4.71)$$

çıkar.

Yüzey eğrisinin jeodezik burulması τ_g , yüzey eğrisinin doğrultusuna göre yatay düzlemin dönüklüğünü gösteren bir ölçüttür. Oskülatör düzlemi dönüklüğünün yay değişimine oranı olan burulma τ (3.30) ve oskülatör düzlemi ile yatay düzlem arasındaki açı değişiminin yay uzunluğu değişimine oranının $(d\delta/ds)$ toplamına eşittir:

$$\tau_g = \tau + \frac{d\delta}{ds} \quad (4.72a)$$

Jeodezik eğriler için $\delta = 0$ nedeniyle normal eğrilik k_n ve jeodezik burulma τ_g , uzay eğrilerine ilişkin eğrilik ve burulma ile çakışır: $k_n = k$, $\tau_g = \tau$.

Normal eğrilik k_n gibi jeodezik burulma τ_g de yüzey eğrisinin eğrilik özelliklerine değil, yalnızca doğrultusuna bağlıdır. Bu nedenle bir yüzeyde belli bir doğrultudaki burulmadan söz edilir. Bir jeodezik eğrinin her noktasında asal normal vektör yüzey normali ile çakıştığından ($\delta = 0$), (4.71) nedeniyle bir jeodezik eğrinin τ_g jeodezik burulması τ burulması ile özdeş olur; herhangi bir yüzey eğrisinin bir noktasındaki jeodezik burulma bu yüzden eğri doğrultusundaki jeodezik eğrinin burulması ile çakışır. Birbirini dik kesen iki yüzey eğrisinin burulmaları eşit ve ters işaretli büyüklüklerdir. Belli bir teğet doğrultusundaki jeodezik burulma ile asal eğrilikler ilişki içindedir. Yüzey üzerinde herhangi bir doğrultu ile k_1 asal eğrilik doğrultusu arasındaki açı θ ile gösterilirse jeodezik burulma için,

$$\tau_g(\theta) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) \sin 2\theta \quad (4.72b)$$

geçerli olur. Asal eğrilik doğrultularında ($\theta = 0$, $\theta = \frac{\pi}{2}$) jeodezik burulma $\tau_g(\theta = 0) = \tau_g(\theta = \frac{\pi}{2}) = 0$ dır. Eğrilik eğrileri (küre ya da döne elipsoit yüzeyinde meridyenler ve paralel daireler) bu nedenle $\tau_g = 0$ özelliği ile de tanımlanır.

Herhangi bir yüzey noktasından belli bir doğrultuda tek bir jeodezik eğri geçer. İki yüzey noktasından geçen en kısa, sürekli bağlantı eğrisi daima jeodezik eğrinin bir parçasıdır. İki yüzey noktası, kürede olduğu gibi iki ayrı jeodezik eğri ile bağlanabilir. İki noktayı birleştiren jeodezik eğrilerden uzunluğu küçük olanı iki nokta arasındaki en kısa yol olarak tek anlamlıdır. Dönel elipsoitte kutuplardan sonsuz sayıda jeodezik eğri geçer.

Kürede büyük daire (jeodezik eğri ile özdeş) yayından farklı olarak dönel elipsoitte meridyenler dışında jeodezik eğri ne bir düzlem, ne de bir kapalı eğridir. Kürede bir noktadan çıkan jeodezik eğriler (büyük daire yayları) karşı kutupta kesişirler. Elipsoitte ise bir noktadan çıkan farklı doğrultulardaki ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) jeodezik eğriler ikinci bir noktada kesişmez. Ancak bir kutuptan çıkan tüm meridyenler (jeodezik eğri) öteki kutupta kesişirler.

4.6.1 Jeodezik eğriliğin denklemi

Bir yüzey eğrisinin bir noktasındaki normal vektör \mathbf{u} ile eğrinin bu noktadaki binormal vektörü \mathbf{b} arasındaki açı $\frac{\pi}{2} - \delta$ dır (Şekil 4.8). Bilindiği gibi bir uzay eğrisinin Frenet üçlüsü için $\mathbf{n} \perp \mathbf{b}$ özelliği geçerlidir. Yüzey eğrisinin k eğriliği ile k_g jeodezik eğriliği arasındaki ilişki (4.71)'de verilmiştir:

$$k_g = k \sin \delta = k \cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}$ yazılabilir. (3.34)'ye göre $\mathbf{x}'' = k\mathbf{n}$ dir. $\mathbf{t} = \mathbf{x}'$, $\mathbf{t} \times \mathbf{n} = \mathbf{b}$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'' = k(\mathbf{t} \times \mathbf{n}) = k\mathbf{b}$$

olur. Bu eşitliğin \mathbf{u} ile iç çarpımından jeodezik eğriliğin genel denklemi,

$$k_g = (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'') \cdot \mathbf{u} = k\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \quad (4.73)$$

çıkar.

(4.20)'den,

$$\mathbf{x}' = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{dv}{ds} = \mathbf{x}_u u' + \mathbf{x}_v v' \quad (4.74)$$

ve buradan,

$$\mathbf{x}'' = \frac{d\mathbf{x}'}{ds} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^2} \left(\frac{du}{ds}\right)^2 + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial v^2} \left(\frac{dv}{ds}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u \partial v} \left(\frac{du dv}{ds^2}\right) + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{d^2 v}{ds^2}$$

ya da

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{x}_{uu} u'^2 + \mathbf{x}_{vv} v'^2 + 2\mathbf{x}_{uv} u'v' + \mathbf{x}_u u'' + \mathbf{x}_v v'' \quad (4.75)$$

çıkar. (4.45)'e göre,

$$\mathbf{u} = \frac{1}{\Delta}(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \quad , \quad \Delta = \sqrt{EG - F^2} \quad (4.76)$$

ile (4.73)'den

$$\begin{aligned} k_g &= (\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'')\mathbf{u} = \frac{1}{\Delta}(\mathbf{x}' \times \mathbf{x}'')(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \\ &= \frac{1}{\Delta}(\mathbf{x}'\mathbf{x}_u)(\mathbf{x}''\mathbf{x}_v) - (\mathbf{x}''\mathbf{x}_u)(\mathbf{x}'\mathbf{x}_v) \end{aligned} \quad (4.77)$$

çıkar. (4.24) eşitlikleri göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'\mathbf{x}_u &= \mathbf{x}_u^2 u' + \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v v' = Eu' + Fv' \\ \mathbf{x}'\mathbf{x}_v &= \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v u' + \mathbf{x}_v^2 v' = Fu' + Gv' \\ \mathbf{x}''\mathbf{x}_u &= \mathbf{x}_u \mathbf{x}_{uu} u'^2 + \mathbf{x}_u \mathbf{x}_{uv} v'^2 + 2\mathbf{x}_u \mathbf{x}_{uv} u'v' + Eu'' + Fv'' \\ \mathbf{x}''\mathbf{x}_v &= \mathbf{x}_v \mathbf{x}_{uu} u'^2 + \mathbf{x}_v \mathbf{x}_{vv} v'^2 + 2\mathbf{x}_v \mathbf{x}_{uv} u'v' + Fu'' + Gv'' \end{aligned} \quad (4.78)$$

bulunur. (4.24) eşitliklerinin u, v parametrelerine göre türevleri oluşturulursa;

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u \mathbf{x}_{uu} &= \frac{1}{2}E_u \quad , \quad \mathbf{x}_u \mathbf{x}_{uv} = \frac{1}{2}E_v \\ \mathbf{x}_v \mathbf{x}_{vv} &= \frac{1}{2}G_v \quad , \quad \mathbf{x}_v \mathbf{x}_{uv} = \frac{1}{2}G_u \\ \mathbf{x}_{uu} \mathbf{x}_v &= F_u - \frac{1}{2}E_v \\ \mathbf{x}_{vv} \mathbf{x}_u &= F_v - \frac{1}{2}G_u \end{aligned} \quad (4.79)$$

elde edilir. Bu eşitlikler (4.78)'da yerine konursa (4.77)'den,

$$\begin{aligned} \Delta k_g &= (Eu' + Fv') \left[(F_u - \frac{1}{2}E_v)u'^2 + \frac{1}{2}G_v v'^2 + G_u u'v' + Fu'' + Gv'' \right] - \\ &\quad (Fu' + Gv') \left[\frac{1}{2}E_u u'^2 + (F_v - \frac{1}{2}G_u)v'^2 + E_v u'v' + Eu'' + Fv'' \right] \end{aligned} \quad (4.80)$$

çıkar.

ds yüzey eğrisi elemanının u parametre eğrisiyle ($v = \text{sabit}$) yaptığı açı θ olsun. (4.35) dan,

$$\cos \theta = \frac{Edu + Fdv}{\sqrt{E}ds} \quad , \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{EG - F^2} dv}{\sqrt{E} ds} \quad (4.81)$$

eşitliklerinden $u' = \frac{du}{ds}$, $v' = \frac{dv}{ds}$ bulunur ve $u'' = \frac{d^2u}{ds^2}$, $v'' = \frac{d^2v}{ds^2}$ oluşturulursa,

$$\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial u} = \frac{\frac{\partial E}{\partial u}}{2\sqrt{E}} = \frac{E_u}{2\sqrt{E}} , \quad \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{1}{2\sqrt{E}} \frac{\partial E}{\partial v} = \frac{E_v}{2\sqrt{E}} \quad (4.82)$$

olduğu göz önüne alınarak (4.80)'den k_g jeodezik eğriliğinin denklemi 1. dereceden temel büyüklüklerin ve du/ds ile dv/ds diferansiyel oranlarının fonksiyonu biçiminde,

$$k_g = -\frac{1}{2\Delta} \left[\left(\frac{F}{E} E_u + E_v - 2F_u \right) \frac{du}{ds} + \left(\frac{F}{E} E_v - G_u \right) \frac{dv}{ds} \right] + \frac{d\theta}{ds} \quad (4.83)$$

elde edilir.

Ortogonal parametre ağı için $F = 0$ nedeniyle (4.83)'de $F = 0$ ve $F_u = \frac{\partial F}{\partial u} = 0$ yazılmalıdır. (4.83) denkleminin bulunmasında izlenen yoldan gidilerek ortogonal parametre ağı için jeodezik eğrilik denkleminin nasıl elde edildiğini inceleyelim. Parametre ağı ortogonal ise (4.80) eşitliği,

$$\Delta k_g = E u' \left(-\frac{1}{2} E_v u'^2 + \frac{1}{2} G_v v'^2 + G_u u' v' + G v'' \right) - G v' \left(\frac{1}{2} E_u u'^2 - \frac{1}{2} G_u v'^2 + E_v u' v' + E u'' \right) \quad (4.84)$$

ve (4.81),

$$\cos \theta = \sqrt{E} \frac{du}{ds} , \quad \sin \theta = \sqrt{G} \frac{dv}{ds}$$

olur. $\cos \theta$ ve $\sin \theta$ eşitliklerinden,

$$u' = \frac{du}{ds} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{E}} , \quad v' = \frac{dv}{ds} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{G}} \quad (4.85)$$

$$\left. \begin{aligned} u'' = \frac{d^2u}{ds^2} &= \frac{-\sin \theta \frac{d\theta}{ds} \sqrt{E} - \frac{d\sqrt{E}}{ds} \cos \theta}{E} = \frac{-\sqrt{G} \frac{d\theta}{ds} v' - \frac{d\sqrt{E}}{ds} u'}{\sqrt{E}} \\ v'' = \frac{d^2v}{ds^2} &= \frac{\cos \theta \frac{d\theta}{ds} \sqrt{G} - \frac{d\sqrt{G}}{ds} \sin \theta}{G} = \frac{\sqrt{E} \frac{d\theta}{ds} u' - \frac{d\sqrt{G}}{ds} v'}{\sqrt{G}} \end{aligned} \right\} \quad (4.86)$$

olur. Burada,

$$\frac{d\sqrt{E}}{ds} = \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} \frac{dv}{ds} = \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial u} u' + \frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} v' \quad (4.87)$$

ya da (4.82) ile

$$\frac{d\sqrt{E}}{ds} = \frac{E_u}{2\sqrt{E}} u' + \frac{E_v}{2\sqrt{E}} v' \quad (4.88)$$

benzer biçimde

$$\frac{d\sqrt{G}}{ds} = \frac{G_u}{2\sqrt{G}}u' + \frac{G_v}{2\sqrt{G}}v'$$

dir. Buna göre,

$$\begin{aligned} u'' &= \frac{1}{\sqrt{E}} \left(-\sqrt{G} \frac{d\theta}{ds} v' - \frac{E_u}{2\sqrt{E}} u'^2 - \frac{E_v}{2\sqrt{E}} u'v' \right) \\ v'' &= \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\sqrt{E} \frac{d\theta}{ds} u' - \frac{G_v}{2\sqrt{G}} v'^2 - \frac{G_u}{2\sqrt{G}} u'v' \right) \end{aligned} \quad (4.89)$$

olur. Ortogonal parametre ağı için $\Delta = \sqrt{EG}$ olduğu göz önüne alınarak (4.85) ve (4.89) yardımıyla (4.84)'den (4.83) eşitliğinin özel biçimi ($F = F_u = 0$),

$$\begin{aligned} k_g &= -\frac{1}{2\Delta} \left(E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right) + \frac{d\theta}{ds} \\ &= \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} \sin \theta - \frac{E_v}{2E\sqrt{G}} \cos \theta + \frac{d\theta}{ds} \end{aligned} \quad (4.90a)$$

ya da (4.82) ile,

$$k_g = \frac{\sin \theta}{\sqrt{GE}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} - \frac{\cos \theta}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} + \frac{d\theta}{ds} \quad (4.90b)$$

elde edilir.

Parametre eğrileri ortogonal ($F = 0$) ise (4.90)'den $\theta = 0$ için u eğrisinin ($v = \text{sabit}$) jeodezik eğriliği, $\frac{d\theta}{ds} = 0$ olduğundan,

$$k_{g_u} = -\frac{E_v}{2E\sqrt{G}} = -\frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} \quad (4.91)$$

ve v eğrisinin ($u = \text{sabit}$) eğriliği, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\theta}{ds} = 0$ nedeniyle,

$$k_{g_v} = \frac{G_u}{2G\sqrt{E}} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \quad (4.92)$$

çıkar.

(4.90) denklemi (4.91) ve (4.92) ile,

$$k_g = k_{g_v} \sin \theta + k_{g_u} \cos \theta + \frac{d\theta}{ds} \quad (4.93)$$

şeklinde de düzenlenebilir.

Örnek 4.15

Küre yüzeyi için parametre eğrilerinin jeodezik eğriliğini bulalım.

Kürede birinci temel biçim $ds^2 = R^2 du^2 + R^2 \cos^2 u dv^2$ olduğundan,

$E = R^2$, $F = 0$, $G = R^2 \cos^2 u$ olur.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}(R) = 0 \\ \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}(R \cos u) = -R \sin u \\ k_{g_u} &= 0 \\ k_{g_v} &= -\frac{1}{R} \tan u \neq 0\end{aligned}$$

Buradan $v = \text{sabit}$ eğrisinin (Meridyenler) jeodezik eğri olduğu, $u = \text{sabit}$ eğrisinin (Paraleller) ise jeodezik eğri olmadığı anlaşılmaktadır.

Örnek 4.16

Dönel elipsoit yüzeyi için aynı irdelemeyi yapalım.

Örnek 4.7'de $E = a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u$, $F = 0$, $G = a^2 \cos^2 u$ bulunmuştur.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} &= \frac{\partial}{\partial v}(\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}) = 0 \\ \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} &= \frac{\partial}{\partial u}(a \cos u) = -a \sin u \\ k_{g_u} &= 0 \\ k_{g_v} &= -\frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} \tan u \neq 0\end{aligned}$$

Buradan da $v = \text{sabit}$ eğrisinin jeodezik eğri olduğu, $u = \text{sabit}$ eğrisinin ise jeodezik eğri olmadığı anlaşılmaktadır.

4.6.2 Jeodezik eğrinin denklemi

Jeodezik eğrinin jeodezik eğriliği $k_g = 0$ olduğundan (4.83)'den,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2\Delta} \left[\left(\frac{F}{E} E_u + E_v - 2F_u \right) \frac{du}{ds} + \left(\frac{F}{E} E_v - G_u \right) \frac{dv}{ds} \right] \quad (4.94)$$

çıkar. Jeodezik eğrinin ds yay elemanının u parametre eğrisi ($v = \text{sabit}$) ile yaptığı θ açısının $d\theta$ diferansiyelinin ds yay elemanına oranını, 1. dereceden temel büyüklüklerin ve u, v Gauss parametrelerinin yay elemanına göre türevlerinin fonksiyonu biçiminde veren (4.94) eşitliği yardımıyla bir yüzey üzerindeki jeodezik eğriler tanımlanır.

Ortogonal parametre ağlarında jeodezik eğri denklemi $k_g = 0$ ile (4.90)'den,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2\Delta} \left(E_v \frac{du}{ds} - G_u \frac{dv}{ds} \right) \quad (4.95a)$$

ya da

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \left(\cos \theta \frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v} - \sin \theta \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} \right) \quad (4.95b)$$

elde edilir.

Bir yüzeyin Gauss parametreleriyle gösteriminin özel bir biçimi Euler gösterimidir. Yüzeydeki noktalar için,

$$\begin{aligned} u &= x, & v &= y \\ z &= z(u, v) = z(x, y) \end{aligned} \quad (4.96)$$

koordinatları kabul edilerek (4.11) ile verilen yüzey denkleminin karşılık

$$\mathbf{x}(x, y) = x\mathbf{e}_1 + y\mathbf{e}_2 + z(x, y)\mathbf{e}_3 \quad (4.97)$$

Euler gösterimi elde edilir. Yüzeyin $B(x, y)$ bölgesinde $z(x, y)$ fonksiyonu ve sürekli türevleri olan bir fonksiyon ise $x = \text{sabit}$ ve $y = \text{sabit}$ parametre eğrileri yüzey üzerinde düzenli bir parametre ağı oluşturur.

Bir yüzeyin Euler gösteriminde jeodezik eğrinin diferansiyel denklemleri daha yalındır.

$\mathbf{x}'' = \frac{d\mathbf{x}'}{ds} = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2}$ vektörü asal normal doğrultusundadır. Bir yüzey eğrisi jeodezik eğri ise eğrinin bir noktasındaki asal normal doğrultusu bu noktadaki \mathbf{u} yüzey normali doğrultusu ile çakışık olduğundan \mathbf{x}'' vektörü \mathbf{u} vektörünün dik olduğu parametre eğrilerinin teğet vektörlerine diktir. Bu yüzden,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}_u &= 0 \\ \mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}_v &= 0 \end{aligned}$$

yazılabilir. (4.78) eşitliklerinden son ikisi;

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}_u &= \mathbf{e}_1 + \frac{\partial z}{\partial x} \mathbf{e}_3, & \mathbf{x}_{uu} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{x}_v &= \mathbf{e}_2 + \frac{\partial z}{\partial y} \mathbf{e}_3, & \mathbf{x}_{vv} &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \mathbf{e}_3, & \mathbf{x}_{uv} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \mathbf{e}_3 \end{aligned} \right\} \quad (4.98a)$$

$$E = \mathbf{x}_u \mathbf{x}_u = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2, \quad F = \mathbf{x}_u \mathbf{x}_v = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y}, \quad G = \mathbf{x}_v \mathbf{x}_v = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dz}{ds} &= \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{ds} \\ \frac{d^2 z}{ds^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{dx}{ds} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{d^2 x}{ds^2} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{d^2 y}{ds^2} \\ u' &= \frac{dx}{ds}, \quad v' = \frac{dy}{ds}, \quad u'' = \frac{d^2 x}{ds^2}, \quad v'' = \frac{d^2 y}{ds^2}, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.98b)$$

olduğu göz önüne alınarak düzenlenirse jeodezik eğri için,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x}{ds^2} + p \frac{d^2 z}{ds^2} &= 0 \\ \frac{d^2 y}{ds^2} + q \frac{d^2 z}{ds^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.99)$$

diferansiyel denklemleri elde edilir.

4.7 Alıştırmalar

Alıştırma 4.1 $f(x, y, z) = 2x + 3y^2 - 5 \sin z$ ile tanımlı yüzeyin $(1, 1, \pi/2)$ noktasındaki gradyent vektörü ve teğet düzlemin denklemini belirleyiniz.

Çözüm:

$$\nabla \mathbf{f} = (2, 6y, -5 \cos z)$$

$$\nabla \mathbf{f}_0 = (2, 6, 0)$$

Teğet düzlem denklemi:

$$2(x - 1) + 6(y - 1) = 0 \rightarrow x + 3y - 4 = 0$$

Alıştırma 4.2 $x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} - 3 = 0$ kapalı eşitliğiyle verilen bir yüzeyin $P(1, 2, 3)$ noktasındaki

- normal vektörünü,

- teğet dözlemin denklemini ve
- normalin denklemini

bulunuz.

Çözüm:

$$\nabla f = (2x, \frac{1}{2}y, \frac{2}{9}z)$$

$$\nabla f_0 = (2, 1, \frac{2}{3})$$

Teğet dözlem denklemini:

$$2(x-1) + (y-2) + \frac{2}{3}(z-3) = 0 \quad 6x + 3y + 2z - 18 = 0$$

Normal doğru denklemini:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{\frac{2}{3}}$$

Alystırma 4.3 $\mathbf{x}(u, v) = u\mathbf{e}_1 + 2v^2\mathbf{e}_2 + (u^2 + v)\mathbf{e}_3$ ile verilen yüzeyin,

- düzenli olup olmadığını irdeleyiniz,
- yüzey normalini tanımlayınız.

Çözüm: Yüzey parametrelerine (u, v) göre türev,

$$\mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} = \mathbf{e}_1 + 2u\mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} = 4v\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

buradan Jakobi matrisi oluşturulursa,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4v \\ 2u & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rank}(\mathbf{J}) = 2$$

olduğundan yüzey her noktasında düzenlidir.

Yüzey normali, \mathbf{x}_u ve \mathbf{x}_v teğet vektörleri yardımıyla tanımlanabilir:

$$\nabla f = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 4v & 1 \end{pmatrix} = -8uv\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + 4v\mathbf{e}_3$$

Alystırma 4.4 $\mathbf{x} = a \cos u \cos v \mathbf{e}_1 + a \cos u \sin v \mathbf{e}_2 + b \sin u \mathbf{e}_3$ ile tanımlı döznel elipsoit yüzeyi için yüzey birim normalini bulunuz.

Çözüm:

$$\mathbf{x}_u = -a \sin u \cos v \mathbf{e}_1 - a \sin u \sin v \mathbf{e}_2 + b \cos u \mathbf{e}_3$$

$$\mathbf{x}_v = -a \cos u \sin v \mathbf{e}_1 + a \cos u \cos v \mathbf{e}_2$$

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = \det \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ -a \sin u \cos v & -a \sin u \sin v & b \cos u \\ -a \cos u \sin v & a \cos u \cos v & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -ab \cos^2 u \cos v \mathbf{e}_1 - ab \cos^2 u \sin v \mathbf{e}_2 - a^2 \sin u \cos u \mathbf{e}_3$$

$$\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| = a \cos u \sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u}} \left(b \cos u \cos v \mathbf{e}_1 + b \cos u \sin v \mathbf{e}_2 + a \sin u \mathbf{e}_3 \right)$$

Alıştırma 4.5 Aşağıdaki vektör fonksiyon ile tanımlanan üç eksenli elipsoit yüzeyi için birinci temel biçimi oluşturunuz.

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u)$$

Çözüm:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = -a \sin u \cos v$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -b \sin u \sin v$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = c \cos u$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -a \cos u \sin v$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = b \cos u \cos v$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \right)^2 = \sin^2 u (a^2 \cos^2 v + b^2 \sin^2 v) + c^2 \cos^2 u$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = \sin u \sin v \cos u \cos v (a^2 - b^2)$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v} \right)^2 = \cos^2 u (a^2 \sin^2 v + b^2 \cos^2 v)$$

$F \neq 0$ olduğundan bu yüzeyde seçilen u, v parametreleri ortogonal değildir.

Alystirma 4.6 Aşağıdaki vektör fonksiyon ile tanımlanan parabolit yüzeyi için birinci temel biçimi oluşturunuz. Parametre eğrileri ile sınırlı bir bölgenin alanını bulunuz.
 $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$

Çözüm:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \cos v & \frac{\partial y}{\partial u} &= \sin v & \frac{\partial z}{\partial u} &= 2u \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -u \sin v & \frac{\partial y}{\partial v} &= u \cos v & \frac{\partial z}{\partial v} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 4u^2 + 1 \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = u^2 \\ ds^2 &= (4u^2 + 1) du^2 + u^2 dv^2 \end{aligned}$$

Parabolit için $\Delta = \sqrt{EG - F^2} = u\sqrt{4u^2 + 1}$ olduğundan,

$$A = \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} u\sqrt{4u^2 + 1} du dv = \frac{(4u^2 + 1)^{3/2}}{12} \Big|_{u_1}^{u_2} v \Big|_{v_1}^{v_2}$$

bulunur. Burada u parametresi doğrusal, v parametresi açısal büyüklüktür. Örneğin $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $v_1 = 0$, $v_2 = 2\pi$ alınırsa $A = 5.33\pi$ olur.

Alystirma 4.7 $\mathbf{x} = a u \cos v \mathbf{e}_1 + a u \sin v \mathbf{e}_2 + u \mathbf{e}_3$ ile tanımlı koni yüzeyi için birinci temel biçimi oluşturunuz. Parametre eğrileri ile sınırlı yüzey alanını bulunuz.

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= a \cos v & \frac{\partial y}{\partial u} &= a \sin v & \frac{\partial z}{\partial u} &= 1 \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= -a u \sin v & \frac{\partial y}{\partial v} &= a u \cos v & \frac{\partial z}{\partial v} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 = 1 + a^2 \\
F &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial z}{\partial v} = 0 \\
G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 = a^2 u^2 \\
ds^2 &= (1 + a^2) du^2 + a^2 u^2 dv^2
\end{aligned}$$

Koni için $\Delta = \sqrt{EG - F^2} = a\sqrt{1 + a^2}u$ olduğundan,

$$A = \int_{v_1}^{v_2} \int_{u_1}^{u_2} a\sqrt{1 + a^2} u \, du \, dv = a\sqrt{1 + a^2} \frac{u^2}{2} \Big|_{u_1}^{u_2} \Big|_{v_1}^{v_2}$$

bulunur. Örneğin $a = 1$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$, $v_1 = 0$, $v_2 = 2\pi$ alınırsa $A = 4.44\pi$ olur. Burada u , koni yüksekliğine au ise koni taban yarıçapına karşılık gelmektedir. Örnekte yüksekliği ve taban yarıçapı 1 birim olan koni dış yüzey alanı bulunmuştur.

Alıştırma 4.8 Küre yüzeyinde P_1P_2 noktaları arasındaki büyük daire yayı uzunluğunu bulunuz.

Çözüm:

$\mathbf{f}(\varphi, \lambda) = (r \cos \varphi \cos \lambda, r \cos \varphi \sin \lambda, r \sin \varphi)$ küre yüzeyini tanımlayan vektör fonksiyon olmak üzere P_1 ve P_2 noktalarını gösteren vektörleri yazıp skaler çarpımdan aralarındaki açıyı bulabiliriz. P_1P_2 yayını küre merkezinden gören açı belirlendikten sonra yay uzunluğu da bulunabilir.

$$\mathbf{f}_1 = (r \cos \varphi_1 \cos \lambda_1, r \cos \varphi_1 \sin \lambda_1, r \sin \varphi_1)$$

$$\mathbf{f}_2 = (r \cos \varphi_2 \cos \lambda_2, r \cos \varphi_2 \sin \lambda_2, r \sin \varphi_2)$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2}{\|\mathbf{f}_1\| \|\mathbf{f}_2\|}$$

$$\|\mathbf{f}_1\| = r$$

$$\|\mathbf{f}_2\| = r$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{f}_1 \cdot \mathbf{f}_2 &= r^2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + r^2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \lambda_1 \sin \lambda_2 + r^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 \\
&= r^2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 (\cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2) + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)
\end{aligned}$$

$\cos(\lambda_1 - \lambda_2) = \cos \lambda_1 \cos \lambda_2 + \sin \lambda_1 \sin \lambda_2$ ve $\cos \alpha = \cos -\alpha$ olduğundan,

$$\cos \theta = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos(\lambda_2 - \lambda_1)$$

elde edilir.

Alıştırma 4.9 Küre yüzeyinde P_1P_2 noktalarından geçen loksodromun $\lambda = \text{sabit}$ eğrisi ile yaptığı açıyı bulunuz.

Çözüm:

Loksodrom, $\lambda = \text{sabit}$ eğrilerini (meridyenler) sabit açı altında keser. (4.40) eşitliğinde $\tan \theta = \text{sabit}$ alarak ($u \rightarrow \varphi$ $v \rightarrow \lambda$ $\theta \rightarrow \alpha$),

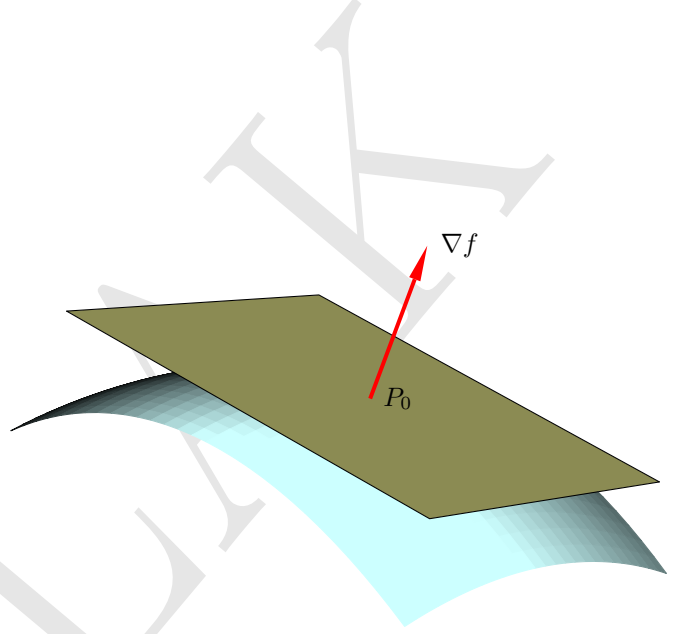
$$\begin{aligned}\sqrt{E} &= r \\ \sqrt{G} &= r \cos \varphi \\ \tan \alpha &= \cos \varphi \frac{d\lambda}{d\varphi} \\ d\lambda &= \tan \alpha \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi\end{aligned}$$

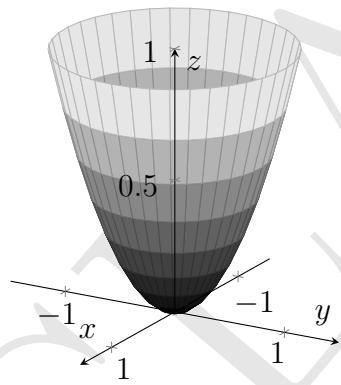
diferansiyel eşitliği elde edilir. İki tarafın integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda &= \tan \alpha \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\cos \varphi} d\varphi \\ \lambda \Big|_{\lambda_1}^{\lambda_2} &= \tan \alpha \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \\ \lambda_2 - \lambda_1 &= \tan \alpha \left(\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) - \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right) \\ \tan \alpha &= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_2}{2} \right) - \ln \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right)}\end{aligned}$$

elde edilir. (4.40) eşitliklerinden loksodromun uzunluğu da bulunabilir ($\cos \alpha = \text{sabit}$).

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\sqrt{E} d\varphi}{ds} = r \frac{d\varphi}{ds} \\ ds &= \frac{r}{\cos \alpha} d\varphi \\ \int_{s_1}^{s_2} ds &= \frac{r}{\cos \alpha} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \\ s \Big|_{s_1}^{s_2} &= \frac{r}{\cos \alpha} \varphi \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} \\ s_{12} &= \frac{r}{\cos \alpha} (\varphi_2 - \varphi_1)\end{aligned}$$





TASLAK

Bölüm 5

BİR YÜZEYİN BİR BAŞKA YÜZEYE İZDÜŞÜMÜ

Bu bölümde bir yüzeyin bir başka yüzeye izdüşümü diferansiyel geometri bakış açısıyla ele alınacaktır. Yüzeylerin izdüşümü kuramsal olarak incelenip harita projeksiyonları örnekleriyle somutlaştırılacaktır.

Bir S yüzeyinin bir başka \bar{S} yüzeyine izdüşümü, S 'deki bir P noktasının \bar{S} 'deki \bar{P} noktasına taşıyan bir dönüşümdür. İzdüşüm, P ve \bar{P} noktaları karşılıklı eşleşiyor ise tek anlamlıdır (Hoschek, 1984). Bazı izdüşümler bir ışık kaynağına göre tanımlı ışınlar ile gerçekleştirilir. Perspektif izdüşüm yada projeksiyon olarak adlandırılan bu projeksiyonlarda bir izdüşüm merkezi söz konusudur. İzdüşüm merkezi sonsuzda da olabilir. Ancak harita projeksiyonlarının çoğunluğu perspektif izdüşüm özelliğinde değildir.

S ve \bar{S} yüzeylerinin parametrik gösterimi $\mathbf{x}(u, v)$ ve $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v})$ vektörleri ile verilmiş ise izdüşüm sürekli diferansiyellenebilir iki fonksiyon ile tanımlıdır.

$$\begin{aligned}\bar{u} &= \bar{u}(u, v) \\ \bar{v} &= \bar{v}(u, v)\end{aligned}\tag{5.1}$$

İzdüşüm tek anlamlı ise fonksiyonel determinat ya da Jakobi determinantı sıfırdan farklıdır.

$$\det \mathbf{J} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} & \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \end{pmatrix} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} \neq 0 \quad (5.2)$$

Bu bölümde (5.2) eşitsizliğini sağlayan dolayısı ile tek anlamlı olan izdüşümler ele alınacaktır. Bu varsayım altında u, v parametreleri \bar{S} için de kullanılıp, iki yüzeydeki eşlenik noktaların (P, \bar{P}) aynı parametre sisteminde olması sağlanabilir. \bar{S} yüzeyi düzlem ise \bar{S}, S 'in haritası olarak da adlandırılır.

Örnek 5.1

Kürenin düzleme izdüşümü olarak Stereografik projeksiyonu ele alalım. Bu durumda yüzeylerin parametrik gösterimleri,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= R \cos u \cos v \mathbf{e}_1 + R \cos u \sin v \mathbf{e}_2 + R \sin u \mathbf{e}_3 \\ \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v}) &= \bar{u} \cos \bar{v} \mathbf{e}_1 + \bar{u} \sin \bar{v} \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

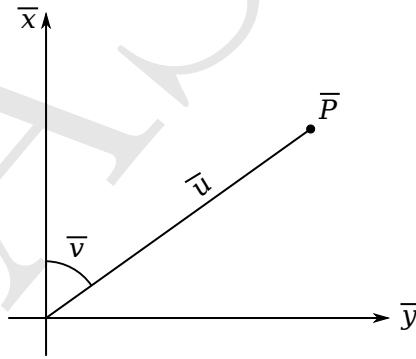
şeklinde. Burada \bar{u}, \bar{v} düzlem kutupsal koordinatlardır. İzdüşüm fonksiyonları:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= 2R \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2} \right) \\ \bar{v} &= v \end{aligned} \quad (5.3)$$

Kısmi türevler:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial u} &= \frac{-R}{\cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2} \right)} & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} &= 1 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} &= 0 & \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} &= 0 \end{aligned}$$

Buna göre (5.2) eşitsizliği sağlanır, izdüşüm tek anlamlıdır.



Örnek 5.2

Kürenin düzleme izdüşümü olarak bu kez Sinusoidal projeksiyonu ele alalım. Yüzeylerin parametrik gösterimleri,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u, v) &= R \cos u \cos v \mathbf{e}_1 + R \cos u \sin v \mathbf{e}_2 + R \sin u \mathbf{e}_3 \\ \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v}) &= \bar{u} \mathbf{e}_1 + \bar{v} \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

Burada \bar{u}, \bar{v} düzlem dik koordinatlarıdır. İzdüşüm fonksiyonları:

$$\begin{aligned}\bar{u} &= Rv \cos u \\ \bar{v} &= Ru\end{aligned}\tag{5.4}$$

Kısmi türevler:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} &= -Rv \sin u & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} &= R \cos u & \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} &= R\end{aligned}$$

(5.2) eşitsizliği,

$$\det \mathbf{J} = R^2 \cos u \neq 0$$

$u = \pm \frac{\pi}{2}$ dışında sağlanır. Bu durum singüler noktalar olan kutuplarda oluşur. Bu noktalar dışında küre yüzeyinde eşitsizlik sağlanır. İzdüşüm tek anlamlıdır.

5.1 Uzunluk ve Alan Deformasyonu

S yüzeyindeki bir C eğrisinin \bar{S} yüzeyindeki karşılığı \bar{C} eğrisi olsun. Genel olarak eğrinin uzunluğu izdüşüm nedeniyle değişir. C eğrisi izdüşüm nedeniyle deforme olur. \bar{C} eğrisinin üzerindeki sonsuz küçük uzunluk $d\bar{s}$ 'in C eğrisindeki karşılığı olan ds uzunluğuna oranı bir noktada C (ya da \bar{C}) doğrultusundaki ölçek ya da uzunluk değişimini ifade eder, diferansiyel ölçek ya da uzunluk deformasyonu olarak adlandırılır. Birinci temel form sonsuz küçük uzunluk elemanları için yazılıp oranlanarak uzunluk deformasyonunun karesi elde edilir.

$$\begin{aligned}ds^2 &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ d\bar{s}^2 &= \bar{E}d\bar{u}^2 + 2\bar{F}d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G}d\bar{v}^2 \\ m^2 &= \frac{d\bar{s}^2}{ds^2} = \frac{\bar{E}d\bar{u}^2 + 2\bar{F}d\bar{u}d\bar{v} + \bar{G}d\bar{v}^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\end{aligned}\tag{5.5}$$

(5.5) eşitliğinden parametre eğrileri boyunca uzunluk deformasyonu bulunabilir. u eğrisi ($v = \text{sabit}, dv = 0$) boyunca uzunluk deformasyonu,

$$m_u^2 = \frac{\bar{E}}{E}\tag{5.6}$$

v eğrisi boyunca ($u = \text{sabit}, du = 0$),

$$m_v^2 = \frac{\bar{G}}{G} \quad (5.7)$$

olarak bulunur. Bir izdüşüm hiç bir deformasyona yol açmaz ise *uzunluk koruyan izdüşüm* olarak adlandırılır. Bu durumda $ds = d\bar{s}$ nedeniyle aşağıdaki eşitlikler geçerlidir.

$$E = \bar{E}, \quad F = \bar{F}, \quad G = \bar{G} \quad (5.8)$$

İzdüşümde oluşan deformasyonların özel bir hâli, deformasyonun ds 'in yönünden bağımsız olmasıdır. Bu durumda bir nokta etrafındaki uzunluk deformasyonu, noktanın konumuna bağlı olup nokta etrafında her yönde aynıdır. (5.5) eşitliğinden,

$$E = \mu^2(u, v)\bar{E}, \quad F = \mu^2(u, v)\bar{F}, \quad G = \mu^2(u, v)\bar{G} \quad (5.9)$$

yazılabilir. Bu tür izdüşümler (ya da projeksiyonlar) *konform* ya da *açı koruyan* olarak adlandırılır. Ancak açı koruma diferansiyel anlamdadır. Sonsuz küçük kenarlar arasındaki açılar S ve \bar{S} yüzeylerinde aynıdır.

Özel durumlar dışında uzunluk deformasyonu hem yöne hem de konuma bağlıdır. Genel anlamda izdüşümlerin özelliklerini incelemek için uzunluk deformasyonunun en büyük ve en küçük değerlerinin belirlenmesi gereklidir.

Uzunluk deformasyonu eşitliği (5.5), normal eğrilik eşitliğine benzer. (4.57) eşitliğinde $L = \bar{E}, M = \bar{F}, N = \bar{G}$ alınırsa, (5.5) elde edilir. Bu nedenle uzunluk deformasyonunun değişimi incelenirken asal eğriliklerin incelenmesine benzer bir yol izlenir (Hoschek, 1984).

Bir S yüzeyinin bir başka \bar{S} yüzeyine izdüşümünde her yüzey noktasında *ana deformasyon doğrultuları* vardır. Bu doğrultular birbirine dik olup, ana deformasyon eğrileri ağı oluştururlar. Ana deformasyon eğrileri S yüzeyinin parametre eğrileri ile çakışık alınır ve S yüzeyinin parametreleri ortogonal seçilir ise $F = 0$ olur. İzdüşümde yerel olarak ana deformasyon yönleri korunur ise, parametre eğrilerinin \bar{S} 'deki izdüşümleri de ortogonaldir. Dolayısı ise $\bar{F} = 0$ olur. m_1, m_2 ana deformasyonları göstermek üzere (4.58) eşitliğine benzer olarak aşağıdaki büyüklükler türetilebilir.

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{1}{m_1^2} \frac{1}{m_2^2} = \frac{EG - F^2}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} \\ 2h^2 &= \frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_2^2} = \frac{E\bar{G} - 2F\bar{F} + G\bar{E}}{\bar{E}\bar{G} - \bar{F}^2} \end{aligned} \quad (5.10)$$

k deformasyon ölçütü, h ise S 'in \bar{S} 'e izdüşümünün ortalama deformasyonu olarak adlandırılır. Uzunluk korunması durumunda $m_1 = m_2 = 1$, dolayısı ile $h = k = 1$; konform olma durumunda $m_1 = m_2$, $k = h^2$ olur¹.

Deformasyon ölçütü k geometrik bir anlama sahiptir. (4.44) eşitliğine göre k , S ve \bar{S} yüzeylerindeki diferansiyel alan elemanlarının oranıdır. Alan elemanlarının deformasyonunu karakterize eder. Bu nedenle S 'in \bar{S} 'e izdüşümünün alan deformasyonu,

$$p = \frac{1}{k} = m_1 m_2 \quad (5.11)$$

bağıntısı ile ifade edilir.

k, h biliniyorken ana deformasyonlar,

$$\frac{1}{m_{1,2}^2} = h^2 \pm \sqrt{h^4 - k^2} \quad (5.12)$$

eşitliğinden bulunabilir.

5.2 Tissot Endikatrişi

Bir nokta etrafında oluşan deformasyonları incelemek için bir basitleştirme yapılarak parametre eğrilerinin ana deformasyon eğrileri olduğu, parametre sisteminin de ortogonal seçildiği ($F = \bar{F} = 0$) varsayılabilir. Bu durumda (5.10) bağıntısından ana deformasyon yönleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$$m_1^2 = \frac{\bar{E}}{E}, m_2^2 = \frac{\bar{G}}{G} \quad (5.13)$$

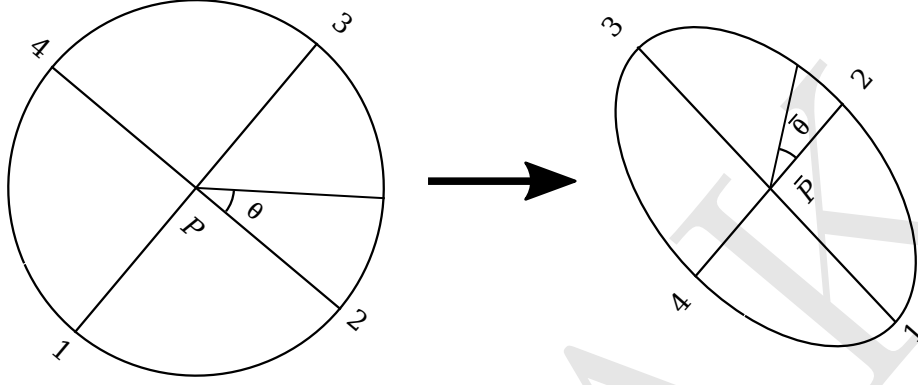
Bir P noktası etrafında herhangi bir yöndeki deformasyon Euler denkleminde [bkz. (4.65)] benzetilerek yazılırsa *Tissot bağıntısı* elde edilir (Hoschek, 1984).

$$\begin{aligned} \frac{ds^2}{d\bar{s}^2} &= \frac{1}{m^2} = \frac{1}{m_1^2} \left(\frac{\bar{E} du^2}{\bar{E} du^2 + \bar{G} dv^2} \right) + \frac{1}{m_2^2} \left(\frac{\bar{G} dv^2}{\bar{E} du^2 + \bar{G} dv^2} \right) \\ &= \frac{\cos^2 \bar{\theta}}{m_1^2} + \frac{\sin^2 \bar{\theta}}{m_2^2} \end{aligned} \quad (5.14)$$

(5.14) eşitliği ile \bar{S} yüzeyinde yarıçapları m_1, m_2 olan bir *elips* tanımlanmaktadır. S yüzeyindeki P noktasının teğet düzleminde merkezi P noktasında yarıçapı

¹Genellikle harita projeksiyonları dokümanlarında meridyen ve paraleller doğrultusundaki uzunluk deformasyonları h, k ile gösterilir. Buradaki h, k büyüklüklerinin bunlarla ilişkisi yoktur.

1 birim olan bir daire oluşturulursa, (5.14) eşitliği bu dairenin \bar{S} yüzeyindeki izdüşümünü ifade etmektedir. Burada söz konusu olan elips, *Tissot Endikatrişi* ya da *deformasyon elipsi* olarak adlandırılır (Şekil 5.1). Uzunluk koruyan izdüşümlerde \bar{S} yüzeyinde eşdeğer bir daire oluşur ya da daire izdüşümde değişikliğe uğramaz ($m = 1$). Konform izdüşümlerde ise yarıçapı m kadar olan bir daire oluşur.



Şekil 5.1: Tissot Endikatrişi

İzdüşüm alınan yüzeyin parametre eğrilerinin izdüşümde ortogonal olmaması durumunda ana deformasyon yönleri bu doğrultularda değildir, temel büyüklük $\bar{F} \neq 0$ olur. Bu tür izdüşümlerde endikatrişin yönünün belirlenmesi gerekir. Şekil 5.2 ve Bildirici (2018)'den aşağıdaki büyüklükler yazılabilir ($m_1 > m_2$).

$$\tan \beta_u = \frac{\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{u}}}{\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{v}}}$$

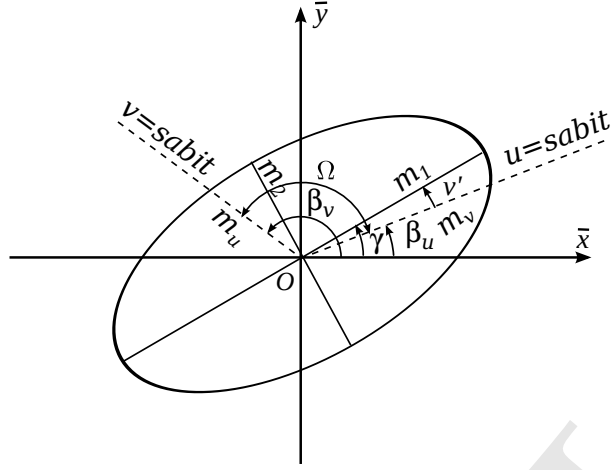
$$\sin v' = \sqrt{\frac{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}}{1 - \frac{m_1^2}{m_2^2}}}$$

$$\gamma = \beta_u + \text{sign}(\bar{F})v'$$
(5.15)

v' açısının işareti, temel büyüklük \bar{F} 'in işareti ile aynı alınır. S yüzeyinin parametre eğrilerinin \bar{S} yüzeyindeki izdüşümlerinin arasındaki açı ise,

$$\cos \Omega = \frac{\bar{F}}{\sqrt{\bar{E}\bar{G}}}$$
(5.16)

bağıntısı ile bulunur. $\bar{F} = 0$ olması halinde açı 90° olur.



Şekil 5.2: $u=sabit$, $v=sabit$ eğrilerinin izdüşümünün ortogonal olmaması durumunda Tissot endikatrisi

5.3 Açı Deformasyonu

Tissot Endikatrisi yardımıyla bir izdüşümün neden olduğu açı deformasyonu araştırılır. \bar{S} yüzeyinde birinci ana deformasyon doğrultusundan başlayan $\bar{\theta}$ açısı ve bunun orijinal yüzdeki karşılığı olan θ açısı için,

$$\tan \bar{\theta} = \sqrt{\frac{\bar{G}}{\bar{E}}} \frac{dv}{du}$$

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{G}{E}} \frac{dv}{du}$$

eşitlikleri geçerlidir. Buradan dv/du elimine edilir.

$$\tan \theta = \sqrt{\frac{G \bar{E}}{\bar{G} E}} \tan \bar{\theta} = \frac{m_1}{m_2} \tan \bar{\theta}$$

Açıdaki değişim $\theta - \bar{\theta}$ farkı ile incelenir, en büyük değeri açı deformasyonu olarak tanımlanır.

$$\frac{\sin(\theta - \bar{\theta})}{\sin(\theta + \bar{\theta})} = \frac{1 - \tan \bar{\theta} \cot \theta}{1 + \tan \bar{\theta} \cot \theta}$$

$$\sin(\theta - \bar{\theta}) = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \sin(\theta + \bar{\theta})$$

m_1, m_2 ana deformasyon büyüklükleri bir noktada sabit olduğundan $\omega = \theta - \bar{\theta}$ farkının en büyük değeri $\sin(\theta + \bar{\theta}) = 1$ olması durumunda oluşur.

$$\sin \omega = \pm \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$$

Her iki işaret de dikkate alındığında açı deformasyonu $w = 2\omega$ olur (Hoschek, 1984).

$$w = 2\omega = 2 \arcsin \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \quad (5.17)$$

Konform izdüşümlerde $m_1 = m_2$ olduğundan $w = 0$ olur.

Örnek 5.3

Örnek 5.1'de ele alınmış olan stereografik projeksiyonda deformasyonları inceleyelim. Kürede temel büyüklükler:

$$E = R^2, F = 0, G = R^2 \cos^2 u$$

\bar{S} yüzeyinin parametrik denklemleri (5.3) eşitliğinden yararlanılarak u, v parametre sistemine göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 2R \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \cos v \\ \bar{y} &= 2R \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \sin v \\ \bar{z} &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Kısmi Türevler:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= \frac{-R}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)} \cos v \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= -2R \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \sin v \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial u} &= \frac{-R}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)} \sin v \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} &= -2R \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \cos v \end{aligned}$$

\bar{S} için temel büyüklükler:

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial u}\right)^2 = \frac{R^2}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)} \\ \bar{F} &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial u} \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} = 0 \\ \bar{G} &= \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial v}\right)^2 = 4R^2 \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \end{aligned}$$

(5.13)'den

$$\begin{aligned} m_1 &= \sqrt{\frac{\bar{E}}{E}} = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)} \\ m_2 &= \sqrt{\frac{\bar{G}}{G}} = \frac{2 \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)}{\cos u} \end{aligned}$$

Yarım açı bağıntılarından²,

$$\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)$$

Buradan,

$$m_1 = m_2 = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)}$$

olduğu görülür. $m_1 = m_2$ olduğundan Streografik projeksiyonun konform (açı koruyan) olduğu görülmektedir. $u = \frac{\pi}{2}$ olduğunda uzunluk deformasyonu 1 değerini alarak en küçük değerine ulaşır. Bunun nedeni Kuzey kutbundan teğet bir düzleme izdüşüm yapılması, bu noktada küre ile düzlemin çakışık olmasıdır.

Örnek 5.4

Örnek 5.2'de ele alınmış olan Sinusoidal projeksiyonu deformasyonlar açısından inceleyelim. \bar{S} yüzeyinin parametrik gösterimi³:

$$\bar{\mathbf{x}} = Rv \cos u \mathbf{e}_1 + Ru \mathbf{e}_2$$

$$\bar{\mathbf{x}}_u = -Rv \sin u \mathbf{e}_1 + R \mathbf{e}_2$$

$$\bar{\mathbf{x}}_v = R \cos u \mathbf{e}_1$$

Temel büyüklükler:

$$E = R^2$$

$$F = 0$$

$$G = R^2 \cos^2 u$$

$$\bar{E} = \bar{\mathbf{x}}_u \cdot \bar{\mathbf{x}}_u = R^2(1 + v^2 \sin^2 u)$$

$$\bar{F} = \bar{\mathbf{x}}_u \cdot \bar{\mathbf{x}}_v = -Rv \sin u \cos u$$

$$\bar{G} = \bar{\mathbf{x}}_v \cdot \bar{\mathbf{x}}_v = R^2 \cos^2 u$$

$\bar{F} \neq 0$ olduğundan u =sabit ve v =sabit eğrilerinin izdüşümleri *ortogonal değildir*. (5.10) eşitliklerinden

$$k^2 = 1 \quad 2h^2 = 2 + v^2 \sin^2 u$$

bulunur. Buradan $k = 1$ nedeniyle izdüşümün *alan koruma* özelliği olduğu görülmektedir.

(5.12) eşitliklerinden ana deformasyonlar bulunabilir. u =sabit ve v =sabit eğrileri yönündeki deformasyonlar:

$$m_u = \sqrt{\frac{\bar{E}}{E}} = \sqrt{1 + v^2 \sin^2 u}$$

$$m_v = \sqrt{\frac{\bar{G}}{G}} = 1$$

² $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$

³Trigonometrik fonksiyon argümanı olmayan açılar radyan biriminde alınmalıdır!

Buradan projeksiyonun u =sabit eğrisi (paralel daireler) yönünde uzunluk koruma özelliği olduğu görülmektedir.

Sayısal Uygulama:

$u = 40^\circ$, $v = 60^\circ$ noktası için yukarıdaki büyüklükleri $R = 1$ alarak hesaplayalım.

$$\bar{\mathbf{x}} = 0.802200 \mathbf{e}_1 + 0.698132 \mathbf{e}_2$$

$$\bar{\mathbf{x}}_u = -0.673126 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$$

$$\bar{\mathbf{x}}_v = 0.766044 \mathbf{e}_1$$

Temel büyüklükler:

$$E = 1 \quad \bar{E} = 1.453098$$

$$F = 0 \quad \bar{F} = -0.515644$$

$$G = 0.586824 \quad \bar{G} = 0.586824$$

(5.10) eşitliklerinden

$$k^2 = 1 \quad 2h^2 = 2.453098 \quad h^2 = 1.226549$$

$$m_1 = 1.391681 \quad m_2 = 0.718555$$

(5.17)'den açı deformasyonu:

$$w = 37.202638^\circ$$

Bu noktada parametre eğrileri arasındaki açı (5.16)'dan bulunabilir.

$$\Omega = 123.945507^\circ$$

v =sabit boyunca deformasyon ise (5.6) eşitliğinden bulunur.

$$m_u = 1.205445$$

u =sabit eğrisi boyunca uzunluk korunduğundan $m_v = 1$ olduğu daha önce bulunmuştu.

Stereografik ve Sinusoidal projeksiyon konusunda daha fazla bilgi için Bildirici (2018)'den yararlanılabilir.

5.4 Alıştırmalar

Alıştırma 5.1 Küreden düzleme tanımlanan aşağıdaki izdüşümün tek anlamlı olup olmadığını irdeleyiniz. Deformasyon özelliklerini araştırınız.

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}, \bar{v}) = \bar{u} \cos \bar{v} \mathbf{e}_1 + \bar{u} \sin \bar{v} \mathbf{e}_2$$

$$\bar{u} = 2R \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2} \right)$$

$$\bar{v} = v$$

Çözüm:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{u}}{\partial u} &= -R \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) & \frac{\partial \bar{v}}{\partial v} &= 1 \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial v} &= 0 & \frac{\partial \bar{v}}{\partial u} &= 0 \\ \det \mathbf{J} &= 2R \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) & & \neq 0\end{aligned}$$

İzdüşüm tanımlıdır. \bar{S} yüzeyinin parametrik gösterimi:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 2R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \cos v \\ \bar{y} &= 2R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \sin v \\ \bar{z} &= 0\end{aligned}$$

Kısmi türevler:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{x}}{\partial u} &= -R \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \cos v \\ \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} &= -2R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \sin v \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial u} &= -R \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \sin v \\ \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} &= 2R \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \cos v\end{aligned}$$

Temel büyüklükler:

$$\begin{aligned}\bar{E} &= \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial u}\right)^2 = R^2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \\ \bar{F} &= \frac{\partial \bar{x}}{\partial u} \frac{\partial \bar{x}}{\partial v} + \frac{\partial \bar{y}}{\partial u} \frac{\partial \bar{y}}{\partial v} = 0 \\ \bar{G} &= \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial v}\right)^2 = 4R^2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)\end{aligned}$$

$\bar{F} = 0$ olduğundan ana deformasyon yönleri parametre eğrileri doğrultusundadır.

$$\begin{aligned}m_u &= \sqrt{\frac{\bar{E}}{\bar{E}}} = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \\ m_v &= \sqrt{\frac{\bar{G}}{\bar{G}}} = \frac{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)}{\cos u} = \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)}\end{aligned}$$

$m_u m_v = 1$ olduğundan izdüşümün alan koruma özelliği vardır.

Not: $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{u}{2}\right)$

Alystırma 5.2 $\bar{\mathbf{x}} = Rv \mathbf{e}_1 + Ru \mathbf{e}_2$ ile verilen izdüşümün deformasyon özelliklerini araştırınız.

Çözüm:

$\det \mathbf{J} \neq 0$ olduğundan izdüşüm tanımlıdır.

$\bar{E} = \bar{G} = R^2$ olur. $m_u = 1$, $m_v = \frac{1}{\cos u}$ olduğundan, konform olma ya da alan koruma özelliği yoktur. v =sabit eğrisi doğrultusunda uzunluk korunur (Meridyen uzunluğu koruyan silindirik projeksiyon).

TASLAK

Bölüm 6

TENSÖRLER

Tensörler, vektörler, skaler büyüklükler ve diğer tensörler arasındaki doğrusal ilişkileri tanımlayan geometrik nesnelere dir. Bu tür ilişkilerin temel örnekleri arasında skaler çarpım, vektörel çarpım ve doğrusal dönüşümler yer almaktadır. Mühendislik uygulamaları ve fizikte kullanılan geometrik vektörlerin ve skalerlerin kendileri de tensördür. Daha gelişmiş bir örnek \mathbf{v} doğrultusunu girdi olarak alan ve bu vektöre dik yüzeyde $\mathbf{T}^{(v)}$ gerilmesini üreten, bu şekilde iki vektör arasındaki ilişkiyi ifade eden Cauchy gerilme tensörü \mathbf{T} dir (Şekil 6.1). Tensörün üç boyutlu Kartezyen koordinat sisteminde bileşenleri,

$$\sigma = [\mathbf{T}^{e_1} \mathbf{T}^{e_2} \mathbf{T}^{e_3}] = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

matrisini oluşturur. Matrisin kolonları küpün yüzlerine etki eden $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ gerilmeleridir (Wikipedia, 2017).

Verilen bir baz sisteminde (koordinat sisteminde) bir tensor sayısal değerlerin çok boyutlu düzenlenmiş bir dizisi olarak gösterilebilir. Bir tensörün derecesi (ya da rankı) onu temsil etmek için gerekli dizinin boyutudur. Ya da başka bir ifade ile, dizinin bir bileşenini göstermek için gerekli indislerin sayısıdır. Örneğin bir doğrusal dönüşüm bir matris ile (iki boyutlu bir dizi) temsil edilir. Bu nedenle ikinci derece bir tensördür. Bir boyutlu bir dizi ile temsil edilen bir vektör bir birinci derece

tenördür. Skaler büyüklükler tek başına sayılardır ve bu nedenle sıfıncı derece tenörlerdir (Wikipedia, 2017).

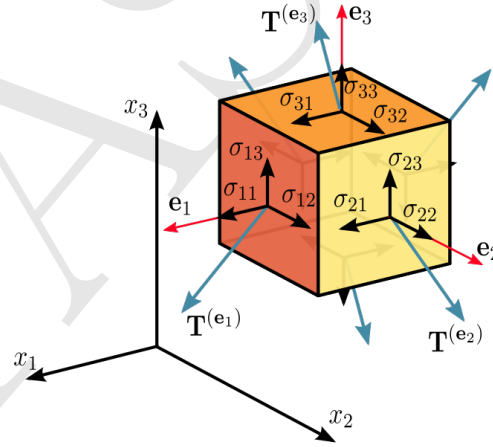
Tensörler, vektörler arasındaki ilişkileri ifade ettiklerinden belli bir baz sistemi seçiminden bağımsız olmak zorundadır. Bir tenörün baz sistemi bağımsızlığı, bir baz sisteminde hesaplanan diziyi bir başka baz sisteminde hesaplanan ile ilişkilendiren kovaryant ve/veya kontravaryant dönüşüm kuralı biçimini alır. Dönüşüm kuralının kesin biçimi tenörün türünü belirler. Tensör türü bir çift doğal sayı (n, m) ile ifade edilir. n kontravaryant indislerin sayısı, m ise kovaryant indislerin sayısıdır. Tensörün toplam derecesi bu iki sayının toplamıdır (Wikipedia, 2017).

Tensörler, gerilme, elastisite, akışkanlar mekaniği ve genel görelilik gibi alanlarda fizik problemlerinin tanımlanması ve çözümünde esaslı bir matematiksel çerçeve oluşturduklarından fizikte önemlidir. Uygulamalarda, bir objenin her bir noktasında farklı bir tenör ortaya çıkacak durumların incelenmesi yaygındır. Örneğin bir objede gerilme noktadan noktaya değişebilir. Bu durum tenör alanı kavramını ortaya çıkarır. Bazı hallerde tenör alanları tenörler olarak da adlandırılabilir.

6.1 Metrik Tensör

Verilen bir kümede komşu noktalar arasında uzaklığı tanımlayan pozitif tanımlı bir $g(x, y)$ fonksiyonu metrik olarak adlandırılır. Bir metrik üçgen eşitsizliğini,

$$g(x, y) + g(y, z) \geq g(x, z) \quad (6.1)$$



Şekil 6.1: Cauchy gerilim tenörü

sağlar ve simetriktir.

$$g(x, y) = g(y, x) \quad (6.2)$$

Aynı zamanda,

$$g(x, x) = 0$$

olur. Dolayısı ile $g(x, y) = 0$ ise $x = y$ olur. Bu koşul sağlanmıyorsa $g(x, y)$ pseudo metrik olarak adlandırılır.

Bir metriğe sahip bir küme metrik uzay olarak adlandırılır. Bir metrik bir tensör olarak görülüyorsa metrik tensör olarak adlandırılır (Weissstein, 2017).

Genel anlamda metrik tensor g_{ij} verilen bir uzayda herhangi iki nokta arasındaki uzaklığın nasıl hesaplanacağını söyleyen bir fonksiyondur (Stove ve Weissstein, 2017). Bileşenleri, genelleştirilmiş Pisagor Teoremi'nde dx_i diferansiyel ötelenmelerinin önündeki katsayılar olarak görülebilir.

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{12}dx_1dx_2 + g_{22}dx_2^2 + \dots \quad (6.3)$$

Öklit uzayında δ_{ij} Kronecker deltası ($i = j$ ise 1, değilse 0) olmak üzere $g_{ij} = \delta_{ij}$ Pisagor Teoremi'nin bilinen halini verir.

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \dots \quad (6.4)$$

Bu düşünce ile, metrik tensor, bir tür genelleştirilmiş bir koordinat sistemi yoluyla bir uzayın geometrik özelliklerini aritmetikleştirerek bir araç olarak görülebilir (Borisenko ve Tarapov, 1979). Bu düşüncede söz konusu uzay, çoğunlukla yumuşak manifold M dir. Burada metrik tensör temel olarak, iki vektörü girdi olarak alan, ya tek bir \mathbf{v} vektörünün uzunluğunun karesi $g(\mathbf{v}, \mathbf{v})$ ya da iki farklı vektörün skaler çarpımı $g(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ hesaplayan geometrik bir objedir. Bu düşüncede söz konusu vektörler çoğunlukla, M üzerinde bir noktadaki teğet uzay T_p de bulunan teğet vektörlerdir.

6.1.1 Birinci temel biçim ve yay uzunluğu

$\mathbf{x}(u, v)$ vektör fonksiyonu ile tanımlı bir yüzey üzerinde $[a, b]$ aralığında $\mathbf{x}(u(t), v(t))$ vektörü yüzey üzerinde bir eğriyi gösterir. Bu eğrinin yay uzunluğu,

$$s(t) = \int_a^b \left\| \frac{d}{dt} \mathbf{x}(u(t), v(t)) \right\| dt \quad (6.5)$$

$$s(t) = \int_a^b \sqrt{u'(t)^2 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + 2u'(t)v'(t) \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + v'(t)^2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v} dt \quad (6.6)$$

integrali ile bulunur. $\mathbf{x}(u, v)$ vektörünün du, dv kadar yer değiştirmesi sonucu oluşan yayın uzunluğunun karesi birinci temel biçim olarak ifade edilir.

$$\begin{aligned} ds^2 &= Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \\ E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \end{aligned} \quad (6.7)$$

E, F, G birinci derece temel büyüklükler olarak adlandırılır. Matris yazımı ile birinci temel biçim ifade edilebilir.

$$ds^2 = (du \quad dv) \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \quad (6.8)$$

6.1.2 Koordinat dönüşümleri

$u' = u'(u), v' = v'(v)$ skaler fonksiyonları yardımıyla u, v parametrelerinden u', v' parametrelerine geçilmek istensin. Yeni parametre sisteminde temel büyüklükler,

$$E' = \mathbf{x}_{u'} \cdot \mathbf{x}_{u'} \quad F' = \mathbf{x}_{u'} \cdot \mathbf{x}_{v'} \quad G' = \mathbf{x}_{v'} \cdot \mathbf{x}_{v'} \quad (6.9)$$

olur. Zincir kuralı ile E', F', G' ile E, F, G büyüklükleri arasında ilişki kurulabilir. $u' = u'(u), v' = v'(v)$ skaler fonksiyonları ile oluşturulan Jakobi matrisi,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

olmak üzere,

$$\begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix} = \mathbf{J}^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \mathbf{J} \quad (6.11)$$

yazılır. Burada \mathbf{J} matrisi koordinat ya da parametre dönüşümünü sağlayan bir tür tensör olup,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$$

matrisi ise ilgili yüzeyin metrik tensörü olarak adlandırılır.

6.1.3 Yay uzunluğunun koordinat sisteminden bağımsız olması

Ricci ve Levi-Civita (1901), birinci temel biçimin koordinat değişimleri nedeniyle değişmediğini ilk kez fark etmişlerdir. Bu durum zincir kuralından görülebilir.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du' \\ dv' \end{pmatrix} \\ ds^2 &= \begin{pmatrix} du & dv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} du' & dv' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial u'} & \frac{\partial u}{\partial v'} \\ \frac{\partial v}{\partial u'} & \frac{\partial v}{\partial v'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du' \\ dv' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} du' & dv' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E' & F' \\ F' & G' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du' \\ dv' \end{pmatrix} = ds'^2 \end{aligned}$$

6.1.4 Uzunluk, açı ve alan

Metrik tensörün bir başka yorumu teğet düzlemde bulunan teğet vektörlerin uzunluklarının ve teğet vektörler arasındaki açılarının hesaplanmasına olanak vermesidir. Diğer bir ifade ile metrik tensör, yüzeyin parametrik tanımlamasından bağımsız olarak teğet vektörlerin skaler çarpımının bulunmasını sağlar. Parametrik bir yüzeyin bir noktasındaki herhangi bir teğet vektör,

$$\mathbf{p} = p_1 \mathbf{x}_u + p_2 \mathbf{x}_v$$

şeklinde ifade edilir ($p_1, p_2 \in R$). \mathbf{a}, \mathbf{b} iki teğet vektör olsun.

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{x}_u + a_2 \mathbf{x}_v, \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{x}_u + b_2 \mathbf{x}_v$$

Skaler çarpım yazılırsa,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_1 b_1 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u + a_1 b_2 \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v + b_1 a_2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_u + a_2 b_2 \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \\ &= a_1 b_1 E + a_1 b_2 F + b_1 a_2 F + a_2 b_2 G \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu dört değişkene (a_1, a_2, b_1, b_2) bağlı bir fonksiyondur. Bu değişken çiftlerini kapsayan u, v düzleminde iki vektörün fonksiyonu şeklinde düzenleme tercih edilir.

$$g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 E + a_1 b_2 F + b_1 a_2 F + a_2 b_2 G \quad (6.12)$$

6.12 eşitliği \mathbf{a} ve \mathbf{b} vektörlerine bağlı simetrik bir fonksiyondur.

$$g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = g(\mathbf{b}, \mathbf{a}) \quad (6.13)$$

6.12 eşitliği aynı zamanda her bir değişkenin ayrı ayrı lineer olması anlamında bilineerdir.

$$\begin{aligned} g(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}', \mathbf{b}) &= \lambda g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mu g(\mathbf{a}', \mathbf{b}) \\ g(\mathbf{a}, \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{b}') &= \lambda g(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + \mu g(\mathbf{a}, \mathbf{b}') \end{aligned} \quad (6.14)$$

Burada $\mathbf{a}, \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{b}'$ teğet düzlemde herhangi dört vektör olup, λ, μ reel sayılardır.

Bir vektörün uzunluğu:

$$\|\mathbf{a}\| = \sqrt{g(a, b)} \quad (6.15)$$

İki vektör arasındaki açı:

$$\cos \theta = \frac{g(a, b)}{\|\mathbf{a}\| \|\mathbf{b}\|} \quad (6.16)$$

Yüzey üzerindeki bir B bölgesinin alanı yüzeyin parametrizasyonundan bağımsız olarak hesaplanabilmelidir.

$$\begin{aligned} &\iint_B \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| dudv \\ &= \iint_B \sqrt{EG - F^2} dudv = \iint_B \sqrt{\det \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}} dudv \end{aligned}$$

Kaynaklar

- Aksoy, A. ve Güneş, İ. H. (1983). *Jeodezi I*. İTÜ, İstanbul.
- Bildirici, İ. (2018). *Kartografya*. Atlas Akademi, Konya.
- Borisenko, A. ve Tarapov, I. (1979). *Vector and Tensor Analysis with Applications*. Dover Publications, New York.
- Goetz, A. (1970). *Introduction to Differential Geometry*. Addison-Wesley Publishing Company.
- Grossmann, W. (1976). *Geodaetische Rechnungen und Abbildungen in der Landesvermessung*. Verlag Konrad Witver, Stuttgart.
- Hoschek, J. (1984). *Mathematische Grundlagen der Kartographie*. BI-Wissenschaftsverlag, Mannheim.
- Öztan, O., Maktav, D., ve Külür, S. (1988). *Jeodezi ve Fotogrametri Mühendisliğinde Diferansiyel Geometri*. İTÜ Yayını, İstanbul.
- Pressley, A. (2001). *Elementary Differential Geometry*. Springer Verlag. Springer Undergraduate Mathematics Series.
- Ricci, M. ve Levi-Civita, T. (1901). Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Mathematische Annalen*, 54:125–131. http://gdz.sub.uni-goettingen.de/en/dms/loader/img/?PPN=PPN235181684_0054&DMDID=DMDLOG_0011[Online; accessed 10.11.2017].

Stove, C. ve Weissstein, E. W. (2017). Metric tensor. <http://mathworld.wolfram.com/MetricTensor.html> [Online; accessed 10.11.2017].

Üstün, A. ve Demirel, H. (2015). *Matematiksel Jeodezi*. Ders Notu (Yayımlanmamış), Konya.

Weissstein, E. W. (2017). Metric. <http://mathworld.wolfram.com/Metric.html> [Online; accessed 10.11.2017].

Wikipedia (2009). Differential geometry — Wikipedia, the free encyclopedia. http://en.wikipedia.org/wiki/Differential_Geometry [Online; accessed 06.01.2009].

Wikipedia (2017). Tensor — Wikipedia, the free encyclopedia. <https://en.wikipedia.org/wiki/Tensor> [Online; accessed 01.01.2017].